

2018年全国高中数学联赛江苏赛区
初赛参考答案与评分细则

一、填空题(本题共10小题,每小题7分,共70分.要求直接将答案写在横线上.)

1. 函数 $y = |\cos x| - \cos 2x$ ($x \in \mathbf{R}$) 的值域是_____.

答案: $[0, \frac{9}{8}]$.

解: $y = |\cos x| - \cos 2x = -2|\cos x|^2 + |\cos x| + 1 = -2(|\cos x| - \frac{1}{4})^2 + \frac{9}{8}$.

因为 $0 \leq |\cos x| \leq 1$, 所以 $0 \leq y \leq \frac{9}{8}$.

2. 已知 $(a+bi)^2 = 3+4i$, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, 则 $a^2+b^2 =$ _____.

答案: 5.

解: 由 $(a+bi)^2 = 3+4i$ 得 $|a+bi|^2 = |3+4i|$, 即 $a^2+b^2=5$.

3. 圆心在抛物线 $x^2=2y$ 上, 并且和该抛物线的准线及 y 轴都相切的圆的方程为_____.

答案: $(x+1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 1$ 和 $(x-1)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = 1$.

解: 抛物线 $x^2=2y$ 的准线方程为 $y = -\frac{1}{2}$.

设所求圆的圆心为 (x_0, y_0) , 则 $x_0^2=2y_0$, 且 $|x_0| = y_0 + \frac{1}{2}$, 解得 $x_0 = \pm 1, y_0 = \frac{1}{2}$.

故所求圆的方程为 $(x \pm 1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = 1$.

4. 设函数 $f(x) = \frac{1-4^x}{2^x} - x$, 则不等式 $f(1-x^2) + f(5x-7) < 0$ 的解集为_____.

答案: (2, 3).

解: 因为 $f(-x) = \frac{1-4^{-x}}{2^{-x}} + x = \frac{4^x-1}{2^x} + x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数且为 \mathbf{R} 上的减函数.

由 $f(1-x^2) + f(5x-7) < 0$, 得 $f(5x-7) < f(x^2-1)$, 所以 $5x-7 > x^2-1$.

即 $x^2-5x+6 < 0$, 解之得: $2 < x < 3$.

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前12项的和为60, 则 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{12}|$ 的最小值为_____.

答案: 60.

解: $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{12}| \geq a_1 + a_2 + \dots + a_{12} = 60$, 又当 $a_1 = a_2 = \dots = a_{12} = 5$ 时, 等号成立,

故 $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_{12}|$ 的最小值为60.

6. 已知正四面体内切球的半径是1, 则该正四面体的体积为_____.

答案: $8\sqrt{3}$.

因此所求的概率为 $\frac{C_3^1 \times C_1^1 \times 5! \times 4!}{9!} = \frac{1}{14}$.

10. 在 1, 2, 3, 4, ..., 1000 中, 能写成 $a^2 - b^2 + 1$ ($a, b \in \mathbb{N}$) 的形式, 且不能被 3 整除的数有 _____ 个.

答案: 501.

解: 设 $S = \{1, 2, 3, 4, \dots, 1000\}$.

若 $n = a^2 - b^2 + 1$, 则 $n \not\equiv 3 \pmod{4}$.

又 $4k = (2k)^2 - (2k-1)^2 + 1$, $4k+1 = (k+1)^2 - (k-1)^2 + 1$, $4k+2 = (2k+1)^2 - (2k)^2 + 1$.

因此, $n = a^2 - b^2 + 1$ 当且仅当 $n \not\equiv 3 \pmod{4}$.

令 $A = \{a \in S \mid a \equiv 3 \pmod{4}\}$, $B = \{b \in S \mid b \equiv 0 \pmod{3}\}$, 则 $A \cap B = \{c \in S \mid c \equiv 3 \pmod{12}\}$.

因此 $|A| = 250$, $|B| = 333$, $|A \cap B| = 84$.

从而符合条件的数的个数为 $1000 - 250 - 333 + 84 = 501$.

二、解答题 (本大题共 4 小题, 每小题 20 分, 共 80 分)

11. 如图, 已知圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, 过点 $P(0, 1)$ 的直线 l 与圆 O 交于点 A, B , 与 x

轴交于点 Q . 设 $\vec{QA} = \lambda \vec{PA}$, $\vec{QB} = \mu \vec{PB}$, 求证: $\lambda + \mu$ 为定值.

证明: 当 AB 与 x 轴垂直时, 此时点 Q 与点 O 重合

从而 $\lambda = 2$, $\mu = \frac{2}{3}$, $\lambda + \mu = \frac{8}{3}$ 5 分

当点 Q 与点 O 不重合时, 直线 AB 的斜率存在.

设 $AB: y = kx + 1$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $Q(-\frac{1}{k}, 0)$.

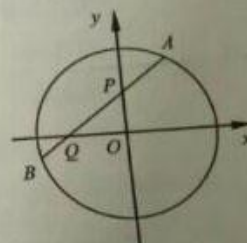
由题设得: $x_1 + \frac{1}{k} = \lambda x_1$, $x_2 + \frac{1}{k} = \mu x_2$, 即 $\lambda + \mu = 1 + \frac{1}{kx_1} + 1 + \frac{1}{kx_2} = 2 + \frac{x_1 + x_2}{kx_1x_2}$.

将 $y = kx + 1$ 代入 $x^2 + y^2 = 4$, 得 $(1+k^2)x^2 + 2kx - 3 = 0$,

则 $\Delta > 0$, $x_1 + x_2 = \frac{-2k}{1+k^2}$, $x_1x_2 = \frac{-3}{1+k^2}$.

所以 $\lambda + \mu = 2 + \frac{-2k}{-3k} = \frac{8}{3}$.

综上所述, $\lambda + \mu$ 为定值 $\frac{8}{3}$.



(第 11 题图)

解：设正四面体的棱长为 a 。

则该正四面体的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} a$ ，全面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 4$ 。

所以 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \times 1 \times 4 = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} a$ ，解得 $a = 2\sqrt{6}$ 。

从而正四面体的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times a^2 \times \frac{\sqrt{6}}{3} a = 8\sqrt{3}$ 。

7. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=5$ ， $AC=4$ ，且 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12$ 。设 P 为平面 ABC 上的一点，

则 $\vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC})$ 的最小值是_____。

答案： $-\frac{65}{8}$ 。

解：由 $AB=5$ ， $AC=4$ ，且 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 12$ 得 $\cos A = \frac{3}{5}$ 。

如图，以 A 为坐标原点， AC 为 x 轴建立直角坐标系，

则 $C(4, 0)$ ， $B(3, 4)$ 。设 $P(x, y)$ ，

$$\begin{aligned} \vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC}) &= (-x, -y) \cdot (7-2x, 4-2y) = 2x^2 - 7x + 2y^2 - 4y \\ &= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + 2(y-1)^2 - \frac{65}{8}. \end{aligned}$$

即 $\vec{PA} \cdot (\vec{PB} + \vec{PC})$ 的最小值是 $-\frac{65}{8}$ 。

8. 设 $g(n) = \sum_{k=1}^n (k, n)$ ，其中 $n \in \mathbb{N}^*$ ， (k, n) 表示 k 与 n 的最大公约数，则 $g(100) =$ _____。

答案： 520。

解：如果 $(m, n) = 1$ ，则 $g(mn) = g(m)g(n)$ 。

所以 $g(100) = g(4)g(25)$ 。

又 $g(4) = 1 + 2 + 1 + 4 = 8$ ，

$g(25) = 5 \times 4 + 25 + (25 - 5) = 65$ ，

所以 $g(100) = 8 \times 65 = 520$ 。

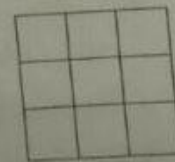
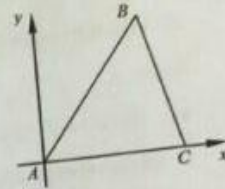
9. 将 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 这 9 个数随机填入 3×3 的方格表中，每个小方格恰填写一个数，且所填数各不相同，则使每行、每列所填数之和都是奇数的概率是_____。

答案： $\frac{1}{14}$ 。

解：要使每行、每列所填数之和都是奇数，

必须使每行或每列中要么只有一个奇数，要么三个全为奇数，

故满足条件的填法共有 $C_3^1 \times C_3^1 \times 5! \times 4!$ 种。



(第9题图)

12. 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 d ($d \neq 0$) 的等差数列, 且 $a_1 + r^2 = a_2 + r^2 = a_3 + r$.
- (1) 求实数 r, d 的值;
- (2) 若正整数满足 $m < p < r$, $a_m - 2r^m = a_p - 2r^p = a_r - 2r^r = 0$, 求数组 (m, p, r) 和相应的通项公式 a_n .

解: (1) 由题, $\begin{cases} a_1 + r^2 = a_1 + d + r^2, \\ a_1 + d + r^2 = a_1 + 2d + r, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} d = r^2 - r, \\ d = r^2 - r. \end{cases}$

因为 $d \neq 0$, 所以 $r \neq 0, r \neq 1$, 所以由 $2r^2 - r - 1 = 0$ 得 $r = -\frac{1}{2}, d = \frac{3}{8}$.

..... 10分

(2) 由 $a_m - 2r^m = a_p - 2r^p = a_r - 2r^r = 0, r = -\frac{1}{2}, d = \frac{3}{8}$

得 $(p-m)d = 2[(-\frac{1}{2})^p - (-\frac{1}{2})^m]$, 及 $(r-p)d = 2[(-\frac{1}{2})^r - (-\frac{1}{2})^p]$.

即 $\frac{3}{8}(p-m) = 2[(-\frac{1}{2})^p - (-\frac{1}{2})^m]$, 及 $\frac{3}{8}(r-p) = 2[(-\frac{1}{2})^r - (-\frac{1}{2})^p]$.

也即 $3(p-m) = 2^4[(-\frac{1}{2})^p - (-\frac{1}{2})^m]$, 及 $3(r-p) = 2^4[(-\frac{1}{2})^r - (-\frac{1}{2})^p]$.

两式左边都是正整数, 故 $m < p < r \leq 4$, 且 m, p 都是奇数.

所以 $m=1, p=3, r=4, a_1 = -1$.

验证如下:

$$a_1 - 2(-\frac{1}{2}) = -1 - 2(-\frac{1}{2}) = 0;$$

$$a_3 - 2(-\frac{1}{2})^3 = \frac{9}{8} - \frac{11}{8} - 2(-\frac{1}{2})^3 = 0;$$

$$a_4 - 2(-\frac{1}{2})^4 = \frac{12}{8} - \frac{11}{8} - 2(-\frac{1}{2})^4 = 0.$$

所以 $(m, p, r) = (1, 3, 4), a_n = -1 + \frac{3}{8}(n-1) = \frac{3}{8}n - \frac{11}{8}$ 20分

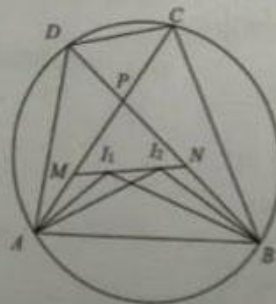
13. 如图, 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 交于点 P , $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 的内心分别为 I_1 和 I_2 , 直线 $I_1 I_2$ 分别与 AC, BD 交于点 M, N , 求证: $PM = PN$.

证明: 因为 I_1, I_2 分别为 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 的内心,

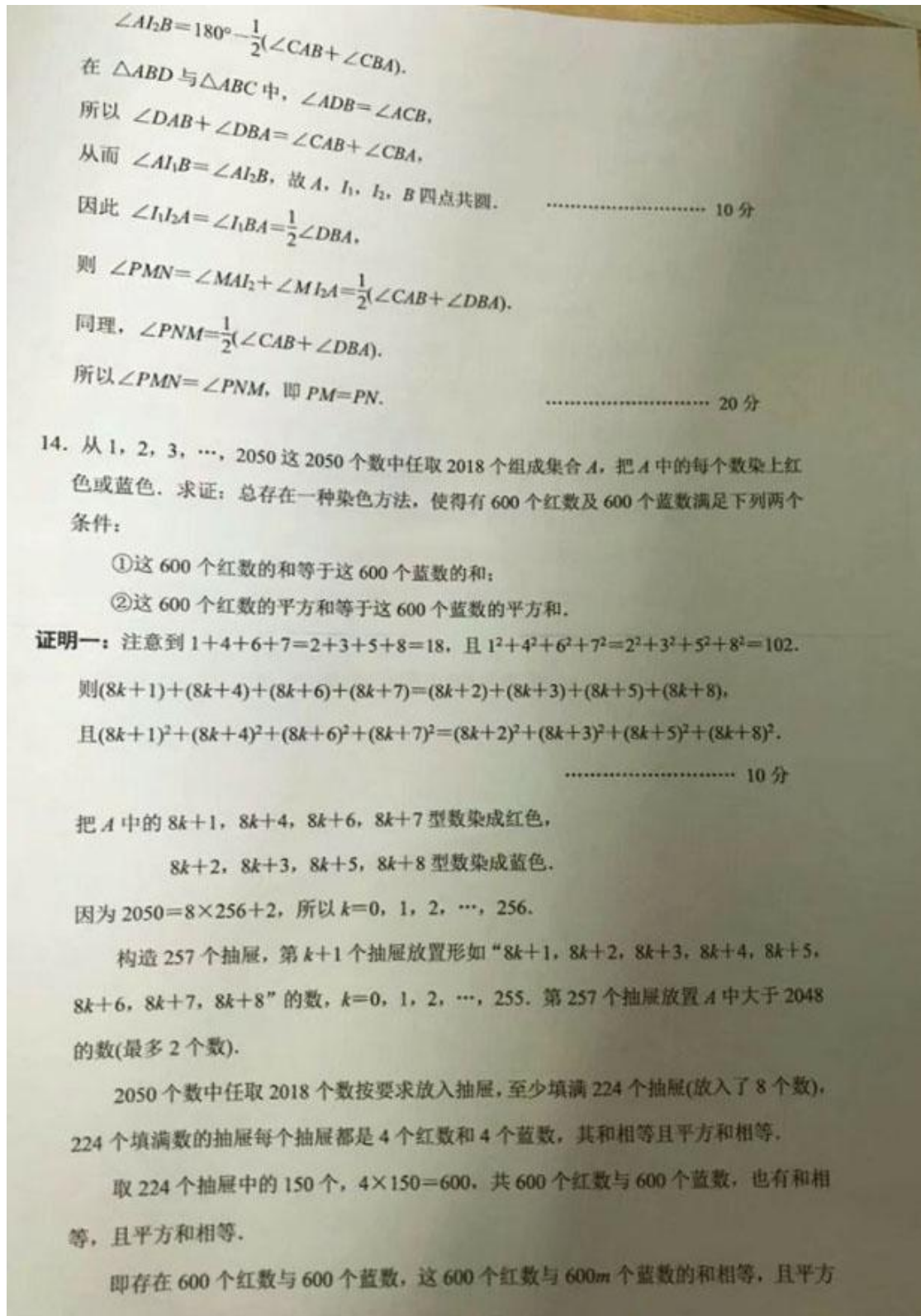
$$\text{所以 } \angle I_1 AB = \frac{1}{2} \angle DAB, \angle I_1 BA = \frac{1}{2} \angle DBA,$$

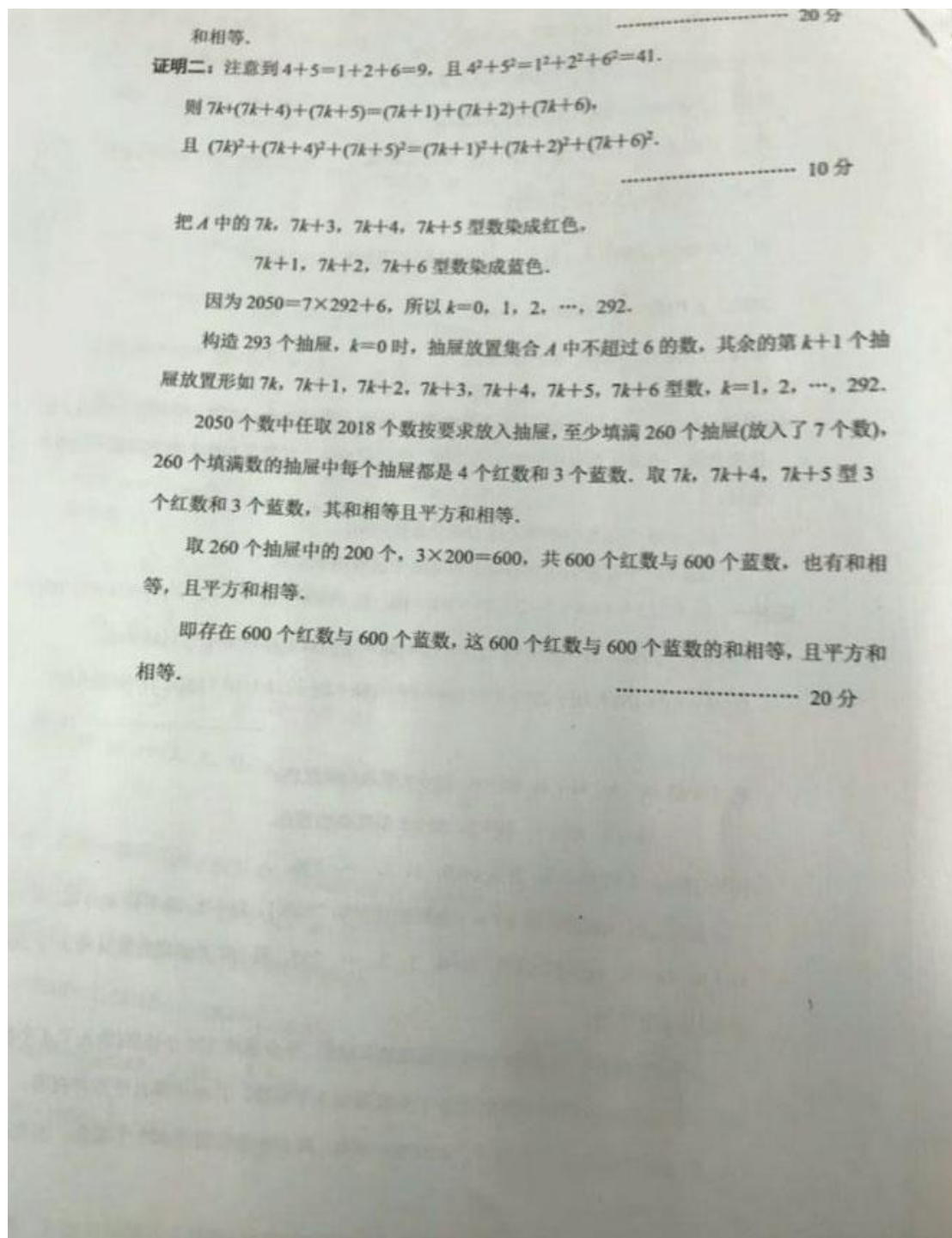
$$\angle I_2 AB = \frac{1}{2} \angle CAB, \angle I_2 BA = \frac{1}{2} \angle CBA,$$

$$\text{故 } \angle AI_1 I_2 = 180^\circ - \frac{1}{2}(\angle DAB + \angle DBA),$$



(第13题图)





自主招生在线创始于2014年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注

