高三理科数学

考生注意：

1. 本试卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。微信搜《高三答案公众号》

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x|x^2-x\leqslant 0\}$，$B=\{x|y=\log_2(x+1)\}$，则 $A\cup B=$

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(0,1)$　　D. $[0,1]$

2. 已知复数 z 满足 $(3+i)z=1+3i$（i 为虚数单位），则 z 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知 m,n 是两条不重合的直线，β 是一个平面且 $n\subset\beta$，则“$m\perp n$”是“$m\perp\beta$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. $(x-1)\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^4 的系数为

A. -60　　B. 60　　C. 12　　D. -12

5. 已知函数 $f(x)=(x^3+2x)\cdot 2^{|x|}-1$，若 $f(a)=2$，则 $f(-a)=$

A. -4　　B. -3　　C. 0　　D. 3

6. 五脊殿是宋代传统建筑中的一种屋顶形式，如图所示. 其屋顶上有一条正脊和四条垂脊，可近似看作一个底面为矩形的五面体. 若某一五脊殿屋顶的正脊长 4 米，底面矩形的长为 6 米，宽为 4 米，正脊到底面矩形的距离为 2 米，则该五脊殿屋顶的体积的估计值为

A. 64　　B. 32

C. $\frac{64}{3}$　　D. $\frac{32}{3}$

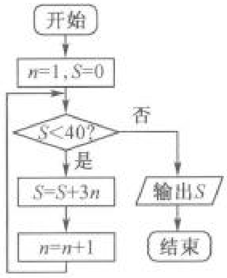
7. 将函数 $f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{11\pi}{24}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $\left(\frac{\pi}{12},0\right)$ 是函数 $g(x)$ 图象的一个对称中心，则函数 $g(x)$ 的一个单调递减区间为

A. $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$　　B. $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$　　C. $\left[\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right]$　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right]$

8. 已知直线 $l:3x+4y-4=0$ 与圆心为 C 的圆：$x^2+y^2-2x+2y=0$ 交于 A，B 两点，则在圆 C 中任取一点，该点取自$\triangle ABC$ 中的概率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{2\pi}$　　D. $\frac{1}{\pi}$

9. 执行如图所示的程序框图，则输出的 S 的值为



A. 45　　B. 40　　C. 35　　D. 30

10. 若函数 $f(x)=\ln x+ax^2-5x$ 在区间$\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$内单调递增，则实数 a 的取值范围为

A. $(-\infty,3]$　　B. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right]$　　C. $\left[3,\frac{25}{8}\right]$　　D. $\left[\frac{25}{8},+\infty\right)$

11. 已知 M 为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点，$A$ 为双曲线右支上一点，若点 A 关于双曲线中心 O 的对称点为 B，设直线 MA、MB 的倾斜角分别为 α、β，且 $\tan\alpha\cdot\tan\beta=\frac{1}{4}$，则双曲线的离心率为

A. $\sqrt{5}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)=x-\sin x$，$g(x)=\begin{cases}x+2, x\leqslant 0,\\ e^{x-1}, x>0,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(g(x))+m=0$ 有两个不等实根 x_1，x_2，且 $x_1<x_2$，则 x_1+x_2 的最大值是

A. 0　　B. 2

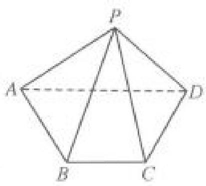
C. $1+\ln 2$　　D. $4+2\ln 2$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(-2,m)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{b}|=$________.

14. 已知椭圆$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左焦点为 F，点 A 是椭圆上异于顶点的任意一点，O 为坐标原点. 若点 B 是线段 AF 的中点，则$\triangle FOB$ 的周长为________.

15. 如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是直角梯形，$BC\perp CD$，$BC\parallel AD$，$AD=2BC=2CD=2$，$PA=PB=1$，当三棱锥 $D-PAB$ 的体积最大时，三棱锥 $D-PAB$ 的外接球的体积为________.



16. $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $\sin A\tan A=\sin B\sin C$，则 $\sin A$ 的最大值为________，此时 $\cos B=$________(第一空 2 分，第二空 3 分).

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：共 60 分.

17.（12 分）

某校随机抽出 30 名女教师和 20 名男教师参加学校组织的“纪念中国人民抗日战争暨世界反法西斯战争胜利 75 周年”知识竞赛（满分 100 分），成绩统计如下表：

女教师成绩分布表

成绩分组	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
频数	5	2	3	m	8

男教师成绩分布表

成绩分组	[50，60)	[60，70)	[70，80)	[80，90)	[90，100]
频数	1	3	10	n	2

（1）试估计所有老师成绩的平均分（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；

（2）若分数为 80 分及以上为优秀，低于 80 分为非优秀，请完成下面 2×2 列联表，并判断是否有 99% 的把握认为这次竞赛成绩优秀与性别有关？

	女教师	男教师	总计
优秀			
非优秀			
总计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

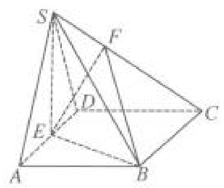
$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001
k	3.841	6.635	10.828

18.（12 分）

如图，四棱锥 $S-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle BAD=60°$，$SA=SD=\sqrt{2}$，$SB=2$，点 E 是棱 AD 的中点，点 F 在 SC 上，且 $SF=\dfrac{1}{3}SC$.

（1）求证：SA∥平面 BEF；

（2）求直线 SB 与平面 BEF 所成角的正弦值.



19.(12分)

已知等差数列$\{a_n\}$的公差为$d(d>0)$,前n项和为S_n,等差数列$\{b_n\}$的公差为$2d$,且$b_1=3,S_3=6$,$a_7=b_3$.

(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设$c_n=2^{a_n}+\frac{1}{b_nb_{n+1}}$,求数列$\{c_n\}$的前$n$项和$C_n$.

20.(12分)

已知抛物线$C:x^2=2py(p>0)$上一点$P(6,y_0)$到焦点F的距离$|PF|=2y_0$.

(1)求抛物线C的方程;微信搜《高三答案公众号》

(2)过点F且斜率为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$的直线l与抛物线C交于A,B两点,点M为抛物线C准线上一点,且$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=3$,求$\triangle MAB$的面积.

21.(12分)

已知函数$f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{t}{2}x^2(t\in\mathbf{R})$.

(1)若$t=0$,求曲线$y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2)若$t\geq1$,试讨论函数$f(x)$的零点个数.

(二)选考题:共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系xOy中,直线l的参数方程为$\begin{cases}x=t+2\sqrt{2},\\y=-t+2\sqrt{2}\end{cases}$($t$为参数),以坐标原点为极点,$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系,曲线$F$的极坐标方程为$\rho=1$.

(1)求曲线F的直角坐标方程和直线l的极坐标方程;

(2)射线$\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho>0)$,$\theta=\frac{\pi}{3}(\rho>0)$和曲线$F$分别交于点$A$,$B$,与直线$l$分别交于$D$,$C$两点,求四边形$ABCD$的面积.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知$f(x)=|x-3|-2$,$g(x)=4-|x+1|$.

(1)若$f(x)\geq g(x)$,求x的取值范围;

(2)若不等式$f(x)-g(x)\geq a^2-3a$的解集为$\mathbf{R}$,求实数a的取值范围.

高三理科数学参考答案、提示及评分细则

1.B　由 $x^2-x\leqslant 0$ 得 $0\leqslant x\leqslant 1$，由 $x+1>0$，解得 $x>-1$，所以 $A\cup B=\{x|x>-1\}$.

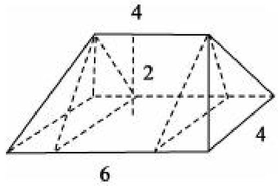
2.A　$z=\dfrac{1+3i}{3+i}=\dfrac{(1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3+4i}{5}$，所以 z 在复平面内对应点的坐标为 $\left(\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5}\right)$，位于第一象限.

3.B

4.D　因为 $\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式的通项：$T_{r+1}=C_6^r(x)^{6-r}\left(\dfrac{2}{x}\right)^r=2^rC_6^rx^{6-2r}$，令 $6-2r=4$，或 $6-2r=3$，解得 $r=1$，$r=\dfrac{3}{2}$（舍去），所以 $(x-1)\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中 x^3 的系数为 $-2^1C_6^1=-12$.

5.A　因为函数 $y=(x^3+2x)\cdot 2^{|x|}$ 为奇函数，$f(a)=(a^3+2a)\cdot 2^{|a|}-1=2$，所以 $(a^3+2a)\cdot 2^{|a|}=3$，所以 $f(-a)=-(a^3+2a)\cdot 2^{|a|}-1=-3-1=-4$.

6.C　如图所示，将屋顶分割为一个三棱柱和两个相同的四棱锥，三棱柱的底面是底边长为 4，高为 2 的等腰三角形，三棱柱的高为 4.



$V=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\times 4+2\times\dfrac{1}{3}\times 4\times 1\times 2=\dfrac{64}{3}$.

7.B　由题意知，$f(x)=\sqrt{2}\sin(2x+\varphi)$，所以 $g(x)=\sqrt{2}\sin(2x-\dfrac{11\pi}{12}+\varphi)$

因为 $(\dfrac{\pi}{12},0)$ 是函数 $g(x)$ 的一个对称中心，则 $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{11\pi}{12}+\varphi=k\pi$，即 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

因为 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$，所以函数 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x-\dfrac{7\pi}{6}\right)$，令 $2k\pi-\dfrac{3\pi}{2}\leqslant 2x-\dfrac{7\pi}{6}\leqslant 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，解得 $k\pi-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\dfrac{\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$.

8.C　圆心 $C(1,-1)$ 到直线 $l:3x+4y-4=0$ 的距离 $d=\dfrac{|3-4-4|}{5}=1$，所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{r^2-d^2}\times d=1$，又圆面积为 $\pi r^2=2\pi$，所以任取一点取自 $\triangle ABC$ 中的概率为 $\dfrac{1}{2\pi}$.

9.A　由题意 $S=3,n=2;S=9,n=3;S=18,n=4;S=30,n=5;S=45,n=6$.

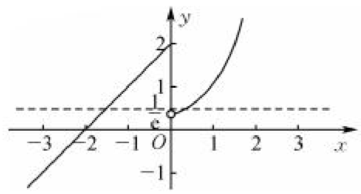
10.D　函数 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$ 内单调递增，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2ax-5\geqslant 0$ 在 $x\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$ 恒成立，即 $2a\geqslant-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x}$ 在 $x\in\left[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right]$ 上恒成立，又 $-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{5}{x}=-\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{25}{4}\in\left[6,\dfrac{25}{4}\right]$，所以 $2a\geqslant\dfrac{25}{4}$，$a\geqslant\dfrac{25}{8}$.

11.D　设 $A(x_0,y_0)$，则 $B(-x_0,-y_0)$，因为 $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{1}{4}$，$k_{MA}\cdot k_{MB}=\dfrac{1}{4}$，因为 $M(a,0)$，所以 $\dfrac{y_0-0}{x_0-a}\cdot\dfrac{-y_0-0}{-x_0-a}=\dfrac{y_0^2}{x_0^2-a^2}=\dfrac{1}{4}$，因为 $\dfrac{x_0^2}{a^2}-\dfrac{y_0^2}{b^2}=1$，所以 $y_0^2=\dfrac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)$，即 $\dfrac{\dfrac{b^2}{a^2}(x_0^2-a^2)}{x_0^2-a^2}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{2}$，又 $c^2=a^2+b^2$，$e=\dfrac{c}{a}$，故双曲线的离心率为 $e=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

12.C　由于 $f'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，故函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增.

又 $f(g(x))=-m$ 有两个相异实根，所以存在 t，使得 $g(x)=t$ 有两个相异实根，

作出函数 $y=g(x)$ 的图象，如图所示：



由图以及题意可知，$t\in(\dfrac{1}{e},2]$.

由 $t=g(x)$，解得 $x_1=t-2$，$x_2=\ln t+1$，即有 $x_1+x_2=\ln t+t-1$，

设 $\varphi(t)=\ln t+t-1$，$t\in(\dfrac{1}{e},2]$，可得 $\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}+1=\dfrac{1+t}{t}>0$，

所以 $\varphi(t)$ 在 $(\dfrac{1}{e},2]$ 上单调递增，$\varphi(t)_{\max}=\varphi(2)=\ln 2+1$.

13.$2\sqrt{2}$　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $(1,-1)\cdot(-2,m)=0$，所以 $-2-m=0$，$m=-2$，所以 $|\boldsymbol{b}|=2\sqrt{2}$.

14.$\sqrt{3}+\sqrt{6}$　由题知 $|OF|=\sqrt{3}$，设其右焦点为 F_2，则 $|AF|+|AF|_2=2\sqrt{6}$，又点 B 是线段 AF 的中点，根据中位线定理，可知 $\triangle FOB$ 的周长为 $|BF|+|BO|+|OF|=\dfrac{1}{2}(|AF|+|AF|_2)+|OF|=\sqrt{3}+\sqrt{6}$.

15. $\frac{4\pi}{3}$　当三棱锥 $D-PAB$ 的体积最大时，平面 PAB 与底面 $ABCD$ 垂直，计算得 $PD=\sqrt{3}$，$AP=1$，$AP^2+PD^2=AD^2$，所以 $\angle APD=90°$，同理 $\angle ABD=90°$，所以三棱锥 $D-PAB$ 的外接球的球心为 AD 中点，半径为 1，外接球的体积为 $\frac{4\pi}{3}$.

16. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　$\frac{\sqrt{6}}{6}$　由条件可知，$\cos A=\frac{\sin^2 A}{\sin B\sin C}$，由正弦定理得 $\cos A=\frac{a^2}{bc}$，由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{a^2}{bc}$，则 $3a^2=b^2+c^2$. 所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-\frac{b^2+c^2}{3}}{2bc}=\frac{b^2+c^2}{3bc}\geqslant\frac{2}{3}$，当且仅当 $b=c$ 时取得等号，$\cos A$ 取得最小值 $\frac{2}{3}$. 所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{3}$，故 $\sin A$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 此时 $\cos 2B=\cos(\pi-A)=-\cos A=-\frac{2}{3}$，所以 $2\cos^2 B-1=-\frac{2}{3}$，$\cos B=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

17. 解：(1) 由题设可知 $m=12$，$n=4$. ………………………………………… 2 分

设所有老师成绩的平均分为 $\bar{x}$.

则 $\bar{x}=\frac{(5+1)\times55+(2+3)\times65+(3+10)\times75+(12+4)\times85+(8+2)\times95}{30+20}=78.8$ 分. ………………… 5 分

(2)

	女教师	男教师	总计
优秀	20	6	26
非优秀	10	14	24
总计	30	20	50

……………………………………………………………………………… 7 分

$K^2=\frac{50\,(20\times14-6\times10)^2}{30\times20\times24\times26}\approx6.464<6.635$，………………………………… 11 分

故没有 99% 的把握认为这次竞赛成绩优秀与性别有关. …………………………… 12 分

18. (1) 证明：连接 AC，设 $AC\cap BE=G$，连结 FG.

因为 E 是 AD 中点，所以 $\frac{AG}{GC}=\frac{AE}{BC}=\frac{1}{2}$. …………………………………… 2 分

因为 $SF=\frac{1}{3}SC$，即 $\frac{SF}{FC}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{SF}{FC}=\frac{AG}{GC}$，所以 $FG/\!/SA$. ………………………… 4 分

又 $FG\subset$ 平面 BEF，$SA\not\subset$ 平面 BEF，

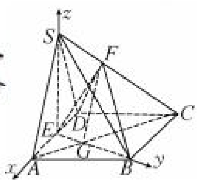
所以 $SA/\!/$ 平面 BEF； ……………………………………………………… 5 分

(2) 解：因为 $SA=SD=\sqrt{2}$，所以 $SE\perp AD$，$SE=1$.

又因为 $AB=AD=2$，$\angle BAD=60°$，所以 $BE=\sqrt{3}$，

所以 $SE^2+BE^2=SB^2$，所以 $SE\perp BE$，因为 $AD\cap BE=E$，所以 $SE\perp$ 平面 $ABCD$. ………… 8 分

以 EA，EB，ES 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，



则 $E(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$S(0,0,1)$，$\overrightarrow{SB}=(0,\sqrt{3},-1)$，$\overrightarrow{EB}=(0,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AS}=(-1,0,1)$，……………………………………………………………… 9 分

由 (1) 知 $\overrightarrow{SA}/\!/\overrightarrow{GF}$，

设平面 EFB 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{EB}\Rightarrow(x,y,z)\cdot(0,\sqrt{3},0)=0\Rightarrow y=0$.

$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{GF}\Rightarrow\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AS}\Rightarrow(x,y,z)\cdot(-1,0,1)=0\Rightarrow x=z$，令 $x=1$，$\boldsymbol{n}=(1,0,1)$ …………………… 10 分

所以 $\cos\langle\overrightarrow{SB},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\overrightarrow{SB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{SB}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，即直线 SB 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. ………………… 12 分

19. 解：(1) 因为数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都是等差数列，且 $S_3=6$，$a_7=b_3$，

所以 $\begin{cases}3a_1+3d=6,\\a_1+6d=3+4d,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_1=1,\\d=1,\end{cases}$ ……………………………………… 4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=n$，$b_n=b_1+(n-1)2d=2n+1$

综上 $a_n=n$，$b_n=2n+1$. ……………………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 得：$c_n=2^n+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=2^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$ ………………………… 7 分

所以 $C_n=(2+2^2+\cdots+2^n)+\frac{1}{2}[(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3})]$ ………………………………… 9分

$=\frac{2(1-2^n)}{1-2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=2^{n+1}-\frac{1}{4n+6}-\frac{11}{6}$. ………………………………… 12分

20. 解：(1)由抛物线的定义得 $|PF|=y_0+\frac{p}{2}$.

由题意得 $\begin{cases}2y_0=y_0+\frac{p}{2},\\36=2py_0,\\p>0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}y_0=3,\\p=6,\end{cases}$ ………………………………… 3分

所以抛物线的方程为 $x^2=12y$； ………………………………… 4分

(2)由(1)知点 $F(0,3)$，所以直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$.

由 $\begin{cases}x+\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0\\x^2=12y\end{cases}$ 可得 $y^2-10y+9=0$. ………………………………… 6分

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1=1$，$y_2=9$，$y_1+y_2=10$，

点 A，B 的坐标分别为 $(2\sqrt{3},1)$，$(-6\sqrt{3},9)$.

设点 M 的坐标为 $(t,-3)$，则 $\overrightarrow{MA}=(2\sqrt{3}-t,4)$，$\overrightarrow{MB}=(-6\sqrt{3}-t,12)$，

则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(2\sqrt{3}-t)(-6\sqrt{3}-t)+4\times12=3$，解得 $t=-\sqrt{3}$ 或 $-3\sqrt{3}$ ………………………………… 8分

所以 $|AB|=|AF|+|BF|=\left(y_1+\frac{p}{2}\right)+\left(y_2+\frac{p}{2}\right)=y_1+y_2+p=10+6=16$，

点 M 到直线 l 的距离为 $d=\frac{|t-6\sqrt{3}|}{2}$，故 $d=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ 或 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$， ………………………………… 10分

当 $d=\frac{7\sqrt{3}}{2}$ 时，$\triangle MAB$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}d\cdot|AB|=28\sqrt{3}$. ………………………………… 11分

当 $d=\frac{9\sqrt{3}}{2}$ 时，$\triangle MAB$ 的面积为 $S=\frac{1}{2}d\cdot|AB|=36\sqrt{3}$. ………………………………… 12分

21. 解：(1)$t=0$，$f(x)=\ln(1+x)-x$，所以 $f'(x)=\frac{1}{1+x}-1$， ………………………………… 1分

由题意知 $\begin{cases}f(1)=\ln 2-1,\\f'(1)=-\frac{1}{2},\end{cases}$ ………………………………… 2分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-\ln 2+1=-\frac{1}{2}(x-1)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+\ln 2-\frac{1}{2}$； ………… 4分

(2)$t\geqslant1$ 时，$f'(x)=\frac{x[tx+(t-1)]}{1+x}$，

令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=0$，$x_2=-1+\frac{1}{t}$， ………………………………… 5分

(ⅰ)当 $t=1$ 时，$f'(x)=\frac{x^2}{1+x}\geqslant0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(0)=0$，故函数 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有且只有一个零点； ………………………………… 7分

(ⅱ)当 $t>1$ 时，此时 $-1<-1+\frac{1}{t}<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(-1,-1+\frac{1}{t}\right]$ 上单调递增，$\left[-1+\frac{1}{t},0\right)$ 上单调递减，$[0,+\infty)$ 上单调递增，

因为 $f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-1+\frac{1}{t},+\infty\right)$ 上有且只有一个零点， ………………………………… 8分

由 $f(x)$ 在 $\left(-1+\frac{1}{t},0\right)$ 上单调递减知 $f\left(-1+\frac{1}{t}\right)>f(0)=0$， ………………………………… 9分

构造函数 $M(x)=\frac{x^2}{2}+1-\ln x$，$x\geqslant1$，则 $M'(x)=x-\frac{1}{x}\geqslant0$，

所以 $M(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $M(t)>M(1)=\frac{1}{2}+1-\ln 1=\frac{3}{2}>0$，即 $\frac{t^2}{2}+1-\ln t>0$，即 $-\frac{t^2}{2}-1<-\ln t$，

所以 $e^{-\frac{t^2}{2}-1}<\frac{1}{t}$，所以 $-1<e^{-\frac{t^2}{2}-1}-1<-1+\frac{1}{t}$， ………………………………… 10分

又因为当 $x\in\left(-1,-1+\frac{1}{t}\right)$ 时，$\frac{t}{2}x^2-x<\frac{t}{2}\cdot(-1)^2-(-1)=\frac{t}{2}+1$，

所以 $f(-1+e^{-\frac{t^2}{2}-1})<\ln(1-1+e^{-\frac{t^2}{2}-1})+\frac{t}{2}+1=-\frac{t^2}{2}-1+\frac{t}{2}+1=-\frac{t}{2}(t-1)<0$，

所以 $f\left(-1+\frac{1}{t}\right)\cdot f(-1+e^{-\frac{t^2}{2}-1})<0$，

所以 $\exists x_0\in\left(-1+e^{-\frac{t^2}{2}-1},-1+\frac{1}{t}\right)$，使得 $f(x_0)=0$，

所以当 $t>1$ 时，$f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上有且仅有两个零点. ………………………………………… 11 分

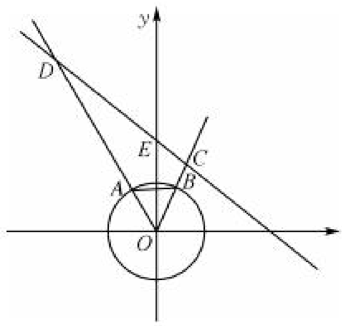
综上所述，当 $t=1$ 时，$f(x)$ 有 1 个零点；当 $t>1$ 时，$f(x)$ 有 2 个零点. ………………………… 12 分

22. 解：(1)曲线 F 转换为直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$.

直线 l 的直角坐标方程为 $x+y-4\sqrt{2}=0$，根据 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$

整理得 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=4\sqrt{2}$，即 $\rho\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=4$. ………………………………………… 4 分

(2)法一：射线 $\theta=\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho>0)$，$\frac{\pi}{3}(\rho>0)$ 和曲线 F 分别交于点 A，B，



与直线 l 分别交于 D，C 两点，如图所示：

所以直线 OC 的直角坐标方程为 $y=\sqrt{3}x$，

直线 OD 的直线方程为 $y=-\sqrt{3}x$，

所以 $\begin{cases}y=-\sqrt{3}x,\\ x+y-4\sqrt{2}=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}(1+\sqrt{3}),\\ y=2\sqrt{6}(1+\sqrt{3}),\end{cases}$

设直线 $x+y-4\sqrt{2}=0$ 与 y 轴交于点 E，

将 $x=0$ 代入 $x+y-4\sqrt{2}=0$，得 $y=4\sqrt{2}$，即 $|OE|=4\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle DOE}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times(2\sqrt{2}+2\sqrt{6})=8+8\sqrt{3}$，

同理：$\begin{cases}y=\sqrt{3}x,\\ x+y-4\sqrt{2}=0,\end{cases}$ 解得：$\begin{cases}x=2\sqrt{6}-2\sqrt{2},\\ y=6\sqrt{2}-2\sqrt{6},\end{cases}$

所以 $S_{\triangle COE}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times(2\sqrt{6}-2\sqrt{2})=8\sqrt{3}-8$，

所以 $S_{四边形ABCD}=S_{\triangle DOE}+S_{\triangle COE}-S_{\triangle AOB}=8+8\sqrt{3}+8\sqrt{3}-8-\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{63\sqrt{3}}{4}$. …………… 10 分

法二：由 $\begin{cases}\theta=\frac{\pi}{3}(\rho>0),\\ \rho(\cos\theta+\sin\theta)=4\sqrt{2},\end{cases}$ 得 $\rho=4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$，

由 $\begin{cases}\theta=\frac{2\pi}{3}(\rho>0),\\ \rho(\cos\theta+\sin\theta)=4\sqrt{2},\end{cases}$ 得 $\rho=4\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$，

所以 $S_{\triangle OCD}=\frac{1}{2}|OD||OC|\sin\angle COD=16\sqrt{3}$，$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA||OB|\sin\angle AOB=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

所以 $S_{四边形ABCD}=16\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{63\sqrt{3}}{4}$. ………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)由 $f(x)\geqslant g(x)$ 可得 $|x-3|+|x+1|\geqslant6$，

当 $x\geqslant3$ 时，原不等式可化为 $2x-2\geqslant6$，解得 $x\geqslant4$；

当 $-1\leqslant x<3$ 时，原不等式可化为 $4\geqslant6$，显然不成立；

当 $x<-1$ 时，原不等式可化为 $2-2x\geqslant6$，解得 $x\leqslant-2$；

所以 x 的取值范围为 $\{x|x\geqslant4$ 或 $x\leqslant-2\}$； ………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)-g(x)=|x-3|+|x+1|-6\geqslant|3-x+x+1|-6=-2$，

所以由不等式 $f(x)-g(x)\geqslant a^2-3a$ 的解集为 $\mathbf{R}$，可得 $a^2-3a+2\leqslant0$，

解得 $1\leqslant a\leqslant2$.

故实数 a 的取值范围是 $\{a|1\leqslant a\leqslant2\}$. ……………………………………………………

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。