南充市高 2023 届高考适应性考试（二诊）

理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

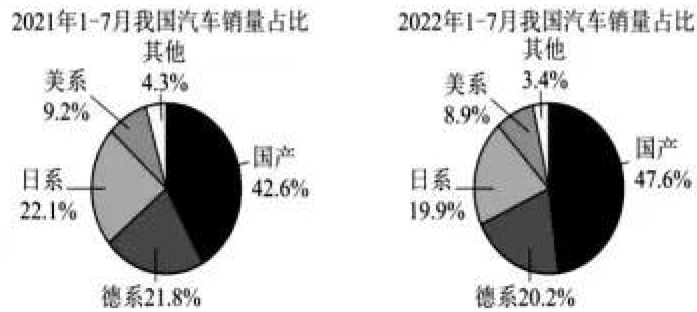
1．复数 z 满足:$(z-i)(1+3i)=10$，则 $z=$（　　）

A．$1+2i$　　B．$-1+2i$　　C．$1-2i$　　D．$-1-2i$

2．已知集合 $A=\{x|-4<x<2\}$，$B=\{x|x^2-x-6\le 0\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A．$\{x|-4<x\le 3\}$　　B．$\{x|-4<x\le -2\}$　　C．$\{x|-2\le x<2\}$　　D．$\{x|2<x\le 3\}$

3．近年来国产品牌汽车发展迅速，特别是借助新能源汽车发展的东风，国产品牌汽车销量得到了较大的提升.如图是 2021 年 1-7 月和 2022 年 1-7 月我国汽车销量占比饼状图，已知 2022 年 1-7 月我国汽车总销量为 1254 万辆，比 2021 年增加了 99 万辆，则 2022 年 1-7 月我国汽车销量与 2021 年 1-7 月相比，下列说法正确的是（　　）



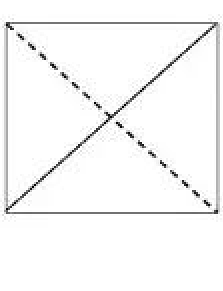
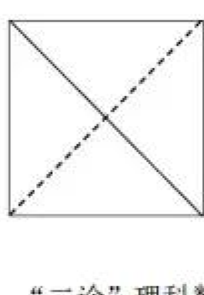
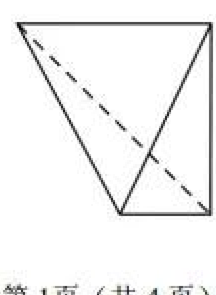
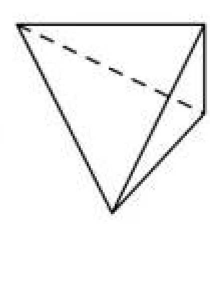
A．日系汽车销量占比变化最大　　B．国产汽车销量占比变大了

C．德系汽车销量占比下降最大　　D．美系汽车销量变少了

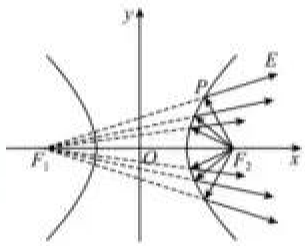
4．已知角 α 的顶点为坐标原点，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边经过点 $P(-4,3)$，则 $\sin(\frac{\pi}{2}+2\alpha)=$（　　）

A．$-\frac{24}{25}$　　B．$-\frac{7}{25}$　　C．$\frac{7}{25}$　　D．$\frac{24}{25}$

5．一个四面体的顶点在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标分别是 $(0,0,1)$，$(1,1,0)$，$(0,1,1)$，$(0,0,0)$，画该四面体三视图中的正视图时，以 yOz 平面为投影面，则正视图可以为（　　）

A． 　B． 　C． 　D． 

6. 智慧的人们在进行工业设计时，巧妙地利用了圆锥曲线的光学性质，比如电影放映机利用椭圆镜面反射出聚焦光线，探照灯利用抛物线镜面反射出平行光线.如图，从双曲线右焦点 F_2 发出的光线通过双曲线镜面反射，且反射光线的反向延长线经过左焦点 F_1．已知入射光线 F_2P 斜率为 $-\sqrt{3}$，且 F_2P 和反射光线 PE 互相垂直（其中 P 为入射点），则双曲线的离心率为（　　）



A．$\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$　　B．$\sqrt{2}$　　C．$2+\sqrt{3}$　　D．$1+\sqrt{3}$

7．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=1$，$a_{n+1}=3S_n(n\geq1)$，则 S_{2023} 等于（　　）

A．4^{2022}　　B．4^{2023}　　C．$\dfrac{4^{2022}-1}{3}$　　D．$\dfrac{4^{2023}-1}{3}$

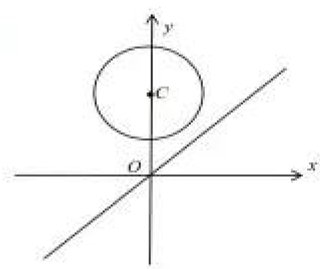
8．在二项式 $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ 的展开式中，二项式的系数和为256，把展开式中所有的项重新排成一列，有理项都互不相邻的概率为（　　）

A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{4}$　　C．$\dfrac{5}{12}$　　D．$\dfrac{1}{3}$

9．在 ΔABC 中，内角 A，B，C 的对应边分别为 a，b，c，已知 $b\sin(B+C)=a\sin\dfrac{A+C}{2}$，且 ΔABC 的面积为 $\sqrt{3}$，则 ΔABC 周长的最小值为（　　）

A．$2\sqrt{2}$　　B．6　　C．$6\sqrt{2}$　　D．$6+2\sqrt{3}$

10．如图，已知点 P 是圆 $C:x^2+(y-3)^2=1$ 上的一个动点，点 Q 是直线 $x-y=0$ 上的一个动点，O 为坐标原点，则向量 $\overline{OP}$ 在向量 $\overline{OQ}$ 上的投影的最大值是（　　）



A．$1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　B．3　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$1+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

11．已知函数 $h(x)=(\dfrac{\ln x}{x})^2-(1-2t)\dfrac{\ln x}{x}+1-2t$ 有三个不同的零点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1<x_2<x_3$．则实数 $(1-\dfrac{\ln x_1}{x_1})\sqrt{(1-\dfrac{\ln x_2}{x_2})\cdot(1-\dfrac{\ln x_3}{x_3})}$ 的值为（　　）

A．$1-t$　　B．$t-1$　　C．-1　　D．1

12．设定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的导函数分别为 $f'(x)$ 和 $g'(x)$．若 $f(x)-g(4-x)=2$，$g'(x)=f'(x-2)$，且 $f(x+2)$ 为奇函数，则下列说法中一定正确的是（　　）

A．$\sum\limits_{k=1}^{2023}f(k)=0$　　B．$\sum\limits_{k=1}^{2023}g(k)=0$

C．$\forall x\in R,f(2+x)+f(-x)=0$　　D．$g(3)+g(5)=4$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13．设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，若 $P(X \le x_0)=0.8$，则 $P(|X| \le x_0)=$__________．

14．已知直线 $y=\frac{3}{2}x-m$ 与曲线 $y=\frac{1}{2}x+\ln x$ 相切，则 m 的值为__________．

15．设 A，B 是抛物线 C：$x^2=4y$ 上的两个不同的点，O 为坐标原点，若直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$，则直线 AB 恒过定点，定点坐标为__________．

16．已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P 满足 $\overline{CP}=\lambda\overline{CD}+\mu\overline{CC_1}$，其中 $\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1]$，有以下结论：来源：高三答案公众号

①．当 $B_1P//$ 平面 A_1BD 时，B_1P 与 CD_1 所成夹角可能为 $\frac{5\pi}{12}$；

②．当 $\lambda=\mu$ 时，$|\overline{DP}|+|\overline{A_1P}|$ 的最小值为 $\sqrt{2+\sqrt{2}}$；

③．当 $\lambda=1$ 时，在正方体中经过点 A_1，P，C 的截面面积的取值范围为 $\left[\frac{\sqrt{6}}{2},\sqrt{2}\right]$；

④．若 B_1P 与平面 CC_1D_1D 所成角为 $\frac{\pi}{4}$，则点 P 的轨迹长度为 π．

则所有正确结论的序号是__________．

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤，第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分

17．已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n.从下面①②中选择其中一个作为条件解答试题，若选择不同条件分别解答，则按第一个解答计分.

①数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，$S_2=6$，且 $4a_2$，$2a_3$，a_4 成等差数列；

②数列 $\{a_n\}$ 是递增的等比数列，$a_1a_4=32$，$a_2+a_3=12$；

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)已知数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 T_n，且 $b_n=\frac{1}{(\log_2 a_n)\cdot(\log_2 a_{n+1})}$.证明：$T_n<1$.

18．某甜品屋店庆当天为酬谢顾客，当天顾客每消费满一百元获得一次抽奖机会，奖品分别为价值 5 元，10 元，15 元的甜品一份，每次抽奖，抽到价值为 5 元，10 元，15 元的甜品的概率分别为 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$，且每次抽奖的结果相互独立.

(1)若某人当天共获得两次抽奖机会，设这两次抽奖所获甜品价值之和为 X 元，求 X 的分布列与期望.

(2)某大学“爱牙协会”为了解“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”情况之间的关系，随机对 200 名青少年展开了调查，得知这 200 个人中共有 120 个人“有蛀牙”，其中“不爱吃甜食”且“有蛀牙”的有 30 人，“不爱吃甜食”且“无蛀牙”的有 50 人.有 2×2 列联表：

	有蛀牙	无蛀牙	合计
爱吃甜食			
不爱吃甜食			
合计			

完成上面的列联表，根据独立性检验，能否有 99.5%的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关？

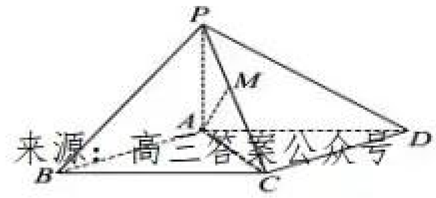
附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，$n=a+b+c+d$.

$P(K^2\ge k)$	0.05	0.01	0.005
k	3.841	6.635	7.879

19. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\angle ABC=60^\circ$，$PB=PD$，$PA\perp AC$.

(1)证明：$BD\perp$ 平面PAC；

(2)若 $PA=\sqrt{3}$，是否存在常数 $\lambda\in[0,1]$，满足 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CP}$，且直线 AM 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{14}}{4}$？若存在，求出点 M 的位置；若不存在，请说明理由.

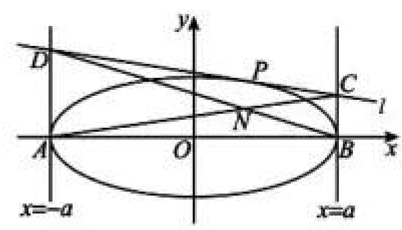


20. 如图，已知 A，B 分别为椭圆 M：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右顶点，$P(x_0,y_0)$ 为椭圆 M 上异于点 A，B 的动点，若 $AB=4$，且 ΔABP 面积的最大值为 2.

(1)求椭圆 M 的标准方程；

(2)已知直线 l 与椭圆 M 相切于点 $P(x_0,y_0)$，且 l 与直线 $x=a$ 和 $x=-a$ 分别相交于 C，D 两点，记四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于点 N.

问：是否存在两个定点 F_1，F_2，使得 $|NF_1|+|NF_2|$ 为定值？若存在，求 F_1，F_2 的坐标；若不存在，说明理由.



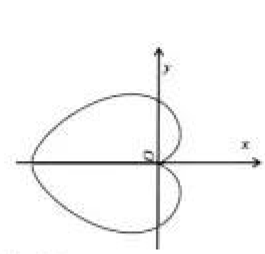
21. 已知函数 $f(x)=e^x-mx^2(m\in R)$，其中 e 为自然对数的底数.

(1)若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有 2 个极值点，求 m 的取值范围；

(2)若函数 $h(x)=f'(x)-2n\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 有零点，求证：$m^2+n^2>\dfrac{e}{4}$.

（二）、在选考题：共 10 分．请考生在第 22、23 题中任选一题作答．如果多做，则按所做的第一题计分．

22. 数学中有许多美丽的曲线，如在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 $E:x^2+y^2=a(\sqrt{x^2+y^2}-x)$，（$a>0$）的形状如心形（如图），我们称这类曲线为笛卡尔心形曲线．以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，当 $a=1$ 时.



(1)求曲线 E 的极坐标方程；

(2)已知 P，Q 为曲线 E 上异于 O 的两点，且 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求 $|PQ|$ 的最大值

23. 已知 $m>0,n>0$，函数 $f(x)=|x+m|+|x-n|+1$ 的最小值为 3.

(1)求 $m+n$ 的值；

(2)求证：$n+\log_{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1}{2m}+\dfrac{2}{n}\right)\ge 4-m$.

南充市高2023届高考适应性考试（二诊）

理科数学参考答案

一．选择题： 本题共 12 小题， 每小题 5 分， 共 60 分．

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	A	B	C	B	D	A	C	B	D	D	A

二.填空题：本题共 4 小题， 每小题 5 分， 共 20 分．

13. 0.6　　14. 1　　15. $(0,2)$　　16. ①②③

三. **解答题**

17. (1)解：若选①：因为数列$\{a_n\}$是等比数列，设公比为q．

$S_2=6$，且$4a_2$，$2a_3$，a_4成等差数列．

所以$\begin{cases}a_1+a_1q=6\\4a_1q+a_1q^3=4a_1q^2\end{cases}$，……………………………………2 分

解得$a_1=2,q=2$，……………………………………4 分

所以$a_n=2\times2^{n-1}=2^n$；……………………………………6 分

若选②：因为数列$\{a_n\}$是递增的等比数列，$a_1a_4=32$，$a_2+a_3=12$，

所以$\begin{cases}a_1a_4=a_2a_3=32\\a_2+a_3=12\end{cases}$，……………………………………2 分

所以$a_2=4,a_3=8$，$q=\dfrac{a_3}{a_2}=2$，……………………………………4 分

所以$a_n=a_2q^{n-2}=4\times2^{n-2}=2^n$；……………………………………6 分

(2)证明：由（1）知$b_n=\dfrac{1}{(\log_2a_n)(\log_2a_{n+1})}=\dfrac{1}{(\log_22^n)(\log_22^{n+1})}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，

所以$T_n=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1-\dfrac{1}{n+1}$，……………………………………10 分

因为$\frac{1}{n+1}>0$，

所以$1-\frac{1}{n+1}<1$，……………………………………………………………………11 分

即$T_n<1$………………………………………………………………………………………12 分

18.解:（1）由题意可得X的所有可能取值为$10,15,20,25,30$，

$P(X=10)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

$P(X=15)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$，

$P(X=20)=2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{18}$，

$P(X=25)=2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$，

$P(X=30)=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$，……………………………………………………4 分

则X的分布列为

X	10	15	20	25	30
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{36}$

故$E(X)=10\times\frac{1}{4}+15\times\frac{1}{3}+20\times\frac{5}{18}+25\times\frac{1}{9}+30\times\frac{1}{36}=\frac{50}{3}$……………………6 分

（2）由题意可得列联表如下：

	有蛀牙	无蛀牙	合计
爱吃甜食	90	30	120
不爱吃甜食	30	50	80
合计	120	80	200

…………………………………………………………………………………………………3 分

所以$K^2=\dfrac{200(90\times50-30\times30)^2}{120\times80\times120\times80}=28.125>7.879$，……………………………………11 分

根据临界值表可知，有 99.5%的把握认为“爱吃甜食”与青少年“蛀牙”有关.……………………12 分

19.（1）证明：连接BD交AC于O，连接PO.

因为底面 ABCD 是边长为 2 的菱形，所以$BD\perp AC$，……………………………………2 分

因为 O 是 BD 中点，$PB=PD$，

所以$BD\perp PO$.

因为$AC\cap PO=O$，AC、$PO\subset$平面 PAC，……………………………………4 分

所以$BD\perp$平面 PAC，……………………………………5 分

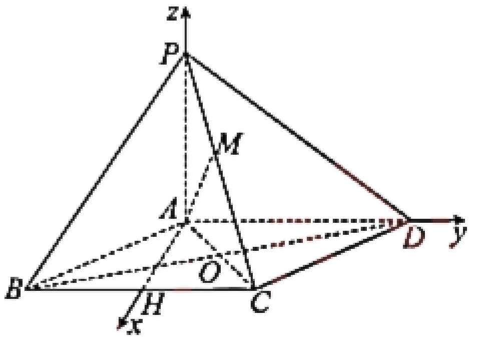
（2）如图，取线段BC的中点H，连接AH，易知$AH\perp AD$.

以A为坐标原点，分别以AH，AD，AP所在直线为x轴，y轴，z轴，建立如图的空间直角坐标系$A-xyz$，则$A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，$P(0,0,\sqrt{3})$.

$\overrightarrow{BC}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$……………………………………7 分

设M点坐标为(x_M,y_M,z_M)

由$\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CP}\ (0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则有$(x_M-\sqrt{3},y_M-1,z_M)=(-\sqrt{3}\lambda,-\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，



解得$M(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,1-\lambda,\sqrt{3}\lambda)$，进而$\overrightarrow{AM}=(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,1-\lambda,\sqrt{3}\lambda)$.

设平面PBC的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$.

由$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}2y=0\\ \sqrt{3}x+y-\sqrt{3}z=0\end{cases}$，取

$\vec{m}=(1,0,1)$……………………………………9 分

设直线AM与平面PBC所成的角为θ，则

$$\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AM},\vec{m}\rangle\right|=\frac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{AM}|}{|\vec{m}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{(\sqrt{3}\lambda)^2+(1-\lambda)^2+(\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2(7\lambda^2-8\lambda+4)}}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

化简得$(7\lambda-4)^2=0$，解得$\lambda=\dfrac{4}{7}$，……………………………………11 分

所以满足条件的M点存在.满足$\overrightarrow{CM}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{CP}$……………………………………12 分

20.（1）解：由题知$\begin{cases} AB = 2a = 4 \\ [S_{\Delta PAB}]_{\max} = \dfrac{1}{2} \cdot 2a \cdot b = 2 \end{cases}$，……………………………………2 分

得$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$……………………………………………………3 分

故椭圆 M 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$.……………………………………4 分

（2）方法一　因为点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上，

所以 $\dfrac{{x_0}^2}{4} + {y_0}^2 = 1$，$(y_0 \neq 0)$.……………………………………5 分

设切线 l 方程为：$y - y_0 = k(x - x_0)$，即 $y = kx + y_0 - kx_0$.

令 $m = y_0 - kx_0$，则 $y = kx + m$.

由$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$，得 $x^2 + 4(kx + m)^2 - 4 = 0$.

$(4k^2 + 1)x^2 + 8kmx + 4(m^2 - 1) = 0$

因为直线 l 与椭圆 M 相切，

所以 $\Delta = (8km)^2 - 4(4k^2 + 1) \cdot (4m^2 - 4) = 0$.

所以 $4k^2 + 1 = m^2$.……………………………………………………7 分

代入 $m = y_0 - kx_0$，得 $4k^2 + 1 = (y_0 - kx_0)^2$.即 $(4 - {x_0}^2)k^2 + 2x_0 y_0 \cdot k + 1 - {y_0}^2 = 0$.

因为 $\dfrac{{x_0}^2}{4} + {y_0}^2 = 1$，所以 $4 - {x_0}^2 = 4{y_0}^2$，$1 - {y_0}^2 = \dfrac{{x_0}^2}{4}$.

所以 $4{y_0}^2 k^2 + 2x_0 y_0 \cdot k + \dfrac{{x_0}^2}{4} = 0$，有 $(2y_0 k + \dfrac{x_0}{2})^2 = 0$.

由于 $y_0 \neq 0$，所以 $k = -\dfrac{x_0}{4y_0}$.

故切线 l 方程为：$y - y_0 = -\dfrac{x_0}{4y_0}(x - x_0)$，即 $\dfrac{x_0 x}{4} + y_0 y = 1$.……………………9 分

令 $x = -2$ 得 $D(-2, \dfrac{1 + \frac{x_0}{2}}{y_0})$，则直线 BD 为：$y = \dfrac{1 + \frac{x_0}{2}}{-4y_0}(x - 2)$.①

令 $x = 2$，得 $C(2, \dfrac{1 - \frac{x_0}{2}}{y_0})$，则直线 AC 为：$y = \dfrac{1 - \frac{x_0}{2}}{4y_0}(x + 2)$.②

由①×②知： $y^2=\dfrac{1-\dfrac{{x_0}^2}{4}}{-16{y_0}^2}\left(x^2-4\right)=\dfrac{1}{-16}\left(x^2-4\right)$

点 N 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=1$，$\left(y\neq 0\right)$．..11 分

由椭圆定义知：存在定点 $F_1\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{2},0\right)$，$F_2\left(\dfrac{\sqrt{15}}{2},0\right)$，使得 $|NF_1|+|NF_2|$ 为定值 4．.........12 分

方法二：因为点 $P(x_0,y_0)$ 在椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 上，

则 $\dfrac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，即 ${y_0}^2=1-\dfrac{{x_0}^2}{4}$．

又因为 $y^2=1-\dfrac{x^2}{4}$，由于 $y\neq 0$，不妨设 $y>0$．

取 $y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$，

所以 $y'=\dfrac{-x}{2\sqrt{4-x^2}}$，

所以切线的斜率 $k=\dfrac{-x_0}{2\sqrt{4-{x_0}^2}}$，

所以切线 l 方程为

$y-y_0=\dfrac{-x_0}{2\sqrt{4-{x_0}^2}}(x-x_0)$，..7 分

由 ${y_0}^2=1-\dfrac{{x_0}^2}{4}$，可得 $4-{x_0}^2=4{y_0}^2$，已知 $y_0>0$，得 $\sqrt{4-{x_0}^2}=2y_0$

所以切线 l 方程为：$y-y_0=\dfrac{-x_0}{4y_0}(x-x_0)$，即 $\dfrac{x_0x}{4}+y_0y=1$...9 分

令 $x=-2$ 得 $D(-2,\dfrac{1+\dfrac{x_0}{2}}{y_0})$，则直线 BD 为： $y=\dfrac{1+\dfrac{x_0}{2}}{-4y_0}(x-2)$ ①

令 $x=2$，得 $C(2,\dfrac{1-\dfrac{x_0}{2}}{y_0})$，则直线 AC 为： $y=\dfrac{1-\dfrac{x_0}{2}}{4y_0}(x+2)$ ②

由①×②知： $y^2=\dfrac{1-\dfrac{{x_0}^2}{4}}{-16{y_0}^2}\left(x^2-4\right)=\dfrac{1}{-16}\left(x^2-4\right)$

由对称性知：点 N 的轨迹方程为 $\dfrac{x^2}{4}+4y^2=1$，$\left(y\neq 0\right)$．..11 分

由椭圆定义知：存在定点 $F_1\left(-\frac{\sqrt{15}}{2},0\right)$，$F_2\left(\frac{\sqrt{15}}{2},0\right)$，使得 $|NF_1|+|NF_2|$ 为定值 4．.......12 分

$\frac{x_0x}{4}+y_0y=1$

20. 解：（1）因为 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-mx^2\,(m\in R)$ 在 $(0,+\infty)$ 有 2 个极值点，

所以 $f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-2mx$ 在 $(0,+\infty)$ 有两个不同的异号零点.

$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x-mx^2=0$ 得 $\frac{\mathrm{e}^x}{x}=2m$，$x\in(0,+\infty)$.显然 $m>0$.

构造函数 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-2m$，$x\in(0,+\infty)$. $g'(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$

当 $0<x<1$ 时，$g'\left(x\right)<0$，$g\left(x\right)$ 在 $(0,1)$ 单调递减；

当 $x>1$ 时，$g'\left(x\right)>0$，$g\left(x\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

所以 $g\left(x\right)_{\min}=g\left(1\right)=e-2m<0$，得 $2m>e$，...4 分

当 $0<x<1$ 时，$e^x>1$，$\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2m}}}{\frac{1}{2m}}=2m\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{2m}}>2m$，

得 $g\left(\frac{1}{2m}\right)>0$，又 $g(1)<0$，$g\left(x\right)$ 在 $(0,1)$ 单调递减.

故存在唯一 $x_1\in(\frac{1}{2m},1)$，使得 $g(x_1)=0$.

当 $x>1$ 时，由于函数 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-2m$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增.

所以 $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ 在 $(0,1)$ 单调递减，$(1,+\infty)$ 单调递增.得 $\frac{\mathrm{e}^x}{x}\geq e$.

所以 $e^x\geq ex$，则 $e^{\frac{x}{2}}\geq\frac{ex}{2}>0$，得 $e^x=(e^{\frac{x}{2}})^2\geq\frac{e^2x^2}{4}$.

所以 $\frac{e^x}{x}\geq\frac{e^2x}{4}$，$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}-2m>\frac{e^2x-8m}{4}$

得 $g\left(\frac{8m}{e^2}\right)>0$，又 $g(1)<0$，$g\left(x\right)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

故存在唯一 $x_2\in(1,\frac{8m}{e^2})$，使得 $g(x_2)=0$.

综上：m 的取值范围为 $(\frac{e}{2},+\infty)$ ……6 分

（2）方法一　$h(x)=f'(x)-2n\sin x=e^{x}-2mx-2n\sin x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有零点，

得 $mx+n\sin x-\frac{e^{x}}{2}=0$，此方程可以看作 mOn 坐标平面的直线 l 的方程.

则直线 l 上的任意一点 (m,n) 到原点的距离满足不等式：

$$\sqrt{m^{2}+n^{2}}\geq\frac{e^{x}}{2\sqrt{x^{2}+\sin^{2}x}}$$

则 $m^{2}+n^{2}\geq\frac{e^{2x}}{4(x^{2}+\sin^{2}x)}$ ……8 分

先证：$x^{2}-\sin^{2}x=(x+\sin x)\cdot(x-\sin x)>0$，$x\in(0,+\infty)$.

构造函数 $p(x)=x+\sin x$，$x\in(0,+\infty)$.则 $p'(x)=1+\cos x\geq0$.

$p(x)=x+\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

$x>0$，得 $p(x)=x+\sin x>p(0)=0$.

即当 $x>0$ 时 $x+\sin x>0$.

同理：构造函数 $q(x)=x-\sin x$，$x\in(0,+\infty)$.则 $q'(x)=1-\cos x\geq0$.

$q(x)=x+\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

$x>0$，得 $q(x)=x-\sin x>q(0)=0$.

即当 $x>0$ 时 $x-\sin x>0$.

所以 $x^{2}-\sin^{2}x=(x+\sin x)\cdot(x-\sin x)>0$. ……10 分

$$m^{2}+n^{2}\geq\frac{e^{2x}}{4(x^{2}+\sin^{2}x)}>\frac{e^{2x}}{4(x^{2}+x^{2})}=\frac{1}{8}(\frac{e^{x}}{x})^{2}>\frac{e^{2}}{8}>\frac{2e}{8}=\frac{e}{4}$$

所以 $m^{2}+n^{2}>\frac{e}{4}$　证毕. ……12 分

方法二　$h(x)=f'(x)-2n\sin x=e^{x}-2mx-2n\sin x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 有零点，

得 $mx+n\sin x-\frac{e^{x}}{2}=0$，则由柯西不等式知：$\frac{e^{x}}{2}=mx+n\sin x\leq\sqrt{m^{2}+n^{2}}\cdot\sqrt{x^{2}+\sin^{2}x}$

$\sqrt{m^{2}+n^{2}}\geq\frac{e^{x}}{2\sqrt{x^{2}+\sin^{2}x}}$，则 $m^{2}+n^{2}\geq\frac{e^{2x}}{4(x^{2}+\sin^{2}x)}$ ……8 分

先证：$x^{2}-\sin^{2}x>0$，$x\in(0,+\infty)$.

构造函数 $h(x)=x^{2}-\sin^{2}x$，$x\in(0,+\infty)$.则 $h'(x)=2x-2\sin x\cos x=2x-\sin 2x$.

构造函数 $k(t)=t-\sin t$， $t\in(0,+\infty)$， 则 $k'(t)=1-\cos t\ge 0$.

$k(t)=t-\sin t$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增. $2x>0$， 得 $k(2x)>k(0)=0$.

所以函数 $h(x)=x^2-\sin^2 x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

当 $x>0$ 时， $x^2-\sin^2 x>0$ ....10 分

由（1）知 $\dfrac{e^x}{x}\ge e$.

$$m^2+n^2\ge\frac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2 x)}>\frac{e^{2x}}{4(x^2+x^2)}=\frac{1}{8}\left(\frac{e^x}{x}\right)^2>\frac{e^2}{8}>\frac{2e}{8}=\frac{e}{4}$$

所以 $m^2+n^2>\dfrac{e}{4}$　证毕. ....12 分

另： $m^2+n^2\ge\dfrac{e^{2x}}{4(x^2+\sin^2 x)}>\dfrac{e^{2x}}{4(x^2+|x|\cdot|\sin x|)}>\dfrac{e^{2x}}{4(x^2+|x|)}>\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)\cdot\dfrac{e^x}{x+1}>\dfrac{1}{4}\cdot e\times 1=\dfrac{e}{4}$

阅卷说明：

考生如按以下方法，请酌情给分.

①当 $x>0$ 时， $x^2-\sin^2 x>0$，得 $|x|>|\sin x|$；②当 $x>0$ 时， $e^x>x+1>1$，得 $\dfrac{e^x}{x+1}>1$.

22.解：（1）将 $x=\rho\cos\theta$， $y=\rho\sin\theta$ 代入曲线 E.

得 $\rho^2=\rho-\rho\cos\theta$， $\rho\ge 0$ 即 $\rho=1-\cos\theta$.

所以 E 的极坐标方程为 $\rho=1-\cos\theta$. ....5 分

（2）不妨设 $P(\rho_1,\theta)$， $Q\left(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$，

即 $\rho_1=1-\cos\theta$， $\rho_2=1-\cos(\theta+\dfrac{\pi}{2})=1+\sin\theta$ ，

则 $|PQ|=\sqrt{\rho_1^{\ 2}+\rho_2^{\ 2}}=\sqrt{(1-\cos\theta)^2+(1+\sin\theta)^2}=\sqrt{3+2(\sin\theta-\cos\theta)}=\sqrt{3+2\sqrt{2}\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})}$

因为 $\sin(\theta-\dfrac{\pi}{4})\in[-1,1]$， ....8 分

所以 $|PQ|\le\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$ ....9 分

当且仅当 $(\theta-\dfrac{\pi}{4})=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ 时，即 $\theta=2k\pi+\dfrac{3\pi}{4}$， $k\in Z$.

所以 $|PQ|$ 的最大值为 $\sqrt{2}+1$. ....10 分

23. 解：（1）因为 $f(x)=|x+m|+|(x-n)|+1\geq|(x+m)-(x-n)|+1=|m+n|+1$，

当且仅当 $(x+m)\cdot(x-n)\leq 0$ 时，即 $x\in[-m,n]$ 时，即等号成立.

又 $m>0$，$n>0$.所以 $[f(x)]_{\min}=m+n+1=3$.

故 $m+n=2$ ....5 分

（2）由（1）知 $m+n=2$，又 $m>0$，$n>0$.

所以 $\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}=(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n})\cdot(m+n)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}+2+\frac{n}{2m}+\frac{2m}{n})\geq\frac{1}{2}\cdot(\frac{5}{2}+2\sqrt{1})=\frac{9}{4}$.

当且仅当 $\begin{cases}\frac{2m}{n}=\frac{n}{2m}\\ m+n=2\end{cases}$，即 $m=\frac{2}{3}$，$n=\frac{4}{3}$ 时，等号成立.

因为 $\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\geq\frac{9}{4}$，..8 分

所以 $\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 2$.

则 $m+n+\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 4$

即 $n+\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{2m}+\frac{2}{n}\right)\geq 4-m$ ....10 分