银川一中2023届高三第三次模拟数学(理科)参考答案

一、选择题：（每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	B	A	C	C	D	A	B	C	D	C

二、填空题：（每小题5分，共20分）

13. 5　　14. $\frac{2}{3}<m<1$　　15. 9　　16.（12，24]

三、解答题

17.【答案】(1) $a_n=2n-1$，$n\in N^*$　　**(2)210**

【详解】（1）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，又$a_1=1$，所以$a_n=1+(n-1)d$.

因为a_1,a_2,a_5是一个等比数列的前三项，所以$a_1a_5=a_2^2$.

即$1+4d=(1+d)^2$又$d\neq0$，所以$d=2$

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2n-1$，$n\in N^*$

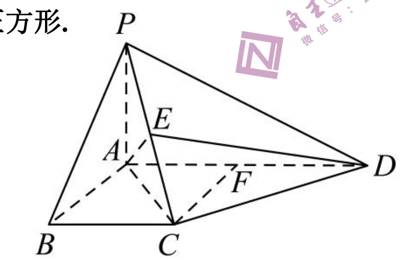
（2）由（1）知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1+2n-1}{2}\times n=n^2$

所以$(-1)^nS_n=(-1)^nn^2$，数列$\{(-1)^nS_n\}$的前20项的和为

$$(-1^2)+2^2+(-3^2)+4^2+\cdots+(-19^2)+20^2=1+2+3+4+\cdots+19+20=\frac{1+20}{2}\times20=210$$

18.【答案】(1)证明见解析　　**(2)** $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【详解】（1）作$CF\perp AD$，垂足为F，易证，四边形$ABCF$为正方形.



所以$CF=AF=DF=1$，$CD=\sqrt{CF^2+DF^2}=\sqrt{2}$.

又$AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=\sqrt{2}$，

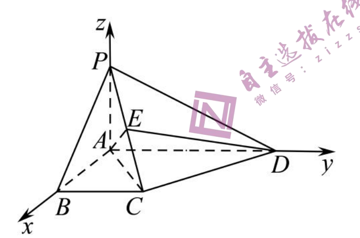
因为$AC^2+CD^2=AD^2$，所以$AC\perp CD$.

因为$PA\perp$平面$ABCD$，$CD\subset$平面$ABCD$，所以$PA\perp CD$.

又$AC\cap PA=A$，$AC\subset$平面PAC，$PA\subset$平面PAC，

所以$CD\perp$平面PAC.

（2）以点A为坐标原点，以AB,AD,AP所在的直线分别为x轴，y轴，z轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$C(1,1,0)$，$D(0,2,0)$，$E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

则$\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$，$\overrightarrow{AE}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.

设平面AED的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

由$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}$，得$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=0\\ y=0\end{cases}$，

令$z=1$，可得平面AED的一个法向量为$\vec{n}=(-1,0,1)$.

设PD与平面AED所成角为θ，

则$\sin\theta=\left|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{PD}\rangle\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}=\frac{|-1|}{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

19.【答案】(1) $\bar{x}=9$，$s^2=1.78$；　　**(2)①** 0.7734；②4.532.

【详解】（1）根据频率分布直方图知，阅读时间在区间

$[5.5,6.5),[6.5,7.5),[7.5,8.5),[8.5,9.5),[9.5,10,5),[10.5,11.5),[11.5,12.5]$

内的频率分别为$0.03,0.1,0.2,0.35,0.19,0.09,0.04$，

$\bar{x}=6\times0.03+7\times0.1+8\times0.2+9\times0.35+10\times0.19+11\times0.09+12\times0.04=9$，

$s^2=(6-9)^2\times0.03+(7-9)^2\times0.1+(8-9)^2\times0.2+(9-9)^2\times0.35+(10-9)^2\times0.19$

$+(11-9)^2\times0.09+(12-9)^2\times0.04=1.78$，

所以样本平均数$\bar{x}$和样本方差s^2分别为**9，1.78.**

（2）①由题意知$\mu=9$，$\sigma^2=1.78$，则有$X\sim N(9,1.78)$，

$\sigma=\sqrt{1.78}=\frac{\sqrt{178}}{10}\approx\frac{4}{3}$，$P(X\le10)=P(Y\le\frac{10-9}{\frac{4}{3}})=P(Y\le0.75)=0.7734$，

②由①知$P(X>10)=1-P(X\le10)=0.2266$，可得$Z\sim B(20,0.2266)$，

所以Z的均值$E(Z)=20\times0.2266=4.532$.

20.【答案】(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$　　**(2)直线PQ的斜率为定值1，理由见解析**

【详解】（1）设$P(x_1,y_1)$，椭圆C的左、右顶点坐标分别为$(-a,0)$，$(a,0)$，

故$\frac{y_1}{x_1-a}\cdot\frac{y_1}{x_1+a}=\frac{y_1^2}{x_1^2-a^2}=\frac{b^2\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)}{x_1^2-a^2}=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{2}$，

即$a^2=2b^2$，则$c^2=a^2-b^2=b^2$，

又$a-c=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，即$\sqrt{2}b-b=\sqrt{6}-\sqrt{3}$，解得$b=\sqrt{3}$，所以$a=\sqrt{6}$，

即椭圆C的方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$.

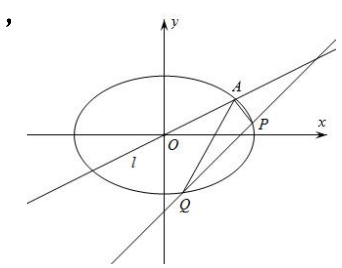
（2）联立$\begin{cases}\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\\ y=\frac{1}{2}x\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2\\ y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2\\ y=-1\end{cases}$，又A在第一象限，所以$A(2,1)$，

由题意知$\angle PAQ$的内角平分线的斜率不存在，即该角平分线与x轴垂直，

设直线AP的斜率为k，则直线AQ的斜率为$-k$，

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线AP的方程为$y-1=k(x-2)$，即$y=kx+1-2k$，

由$\begin{cases}y=kx+1-2k\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$消去$y$得$(2k^2+1)x^2+4k(1-2k)x+8k^2-8k-4=0$，



因为P、A为直线AP与椭圆的交点，所以$2x_1=\frac{8k^2-8k-4}{2k^2+1}$，

即$x_1=\frac{4k^2-4k-2}{2k^2+1}$，

把k换为$-k$得$x_2=\frac{4k^2+4k-2}{2k^2+1}$，所以$x_2-x_1=\frac{8k}{2k^2+1}$，

所以$y_2-y_1=(-kx_2+1+2k)-(kx_1+1-2k)=k[4-(x_1+x_2)]=\frac{8k}{2k^2+1}$，

所以直线PQ的斜率$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$，即直线$PQ$的斜率为定值1.

21.【答案】(1) $a=1$，$b=1$　　**(2)①证明见解析，②成立，理由见解析**

（1）解：$f'(x)=(x+b+1)e^x-a$，

因为函数 $f(x)$ 在 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为 $(e-1)x+ey+e-1=0$，

所以 $f'(-1)=\frac{b}{e}-a=\frac{1}{e}-1$，$f(-1)=(b-1)\left(\frac{1}{e}-a\right)=0$，

∴ $a=1$，$b=1$ 或 $a=\frac{1}{e}$，$b=2-e$（舍），

所以 $a=1$，$b=1$；

（2）①证明：由（1）可知 $f(x)=(x+1)(e^x-1)$，$f'(x)=(x+2)e^x-1$，

令 $g(x)=f'(x)=(x+2)e^x-1$，

则 $g'(x)=(x+3)e^x$，令 $g'(x)=0$，得 $x=-3$，

所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,-3)$ 上递减，在 $(-3,+\infty)$ 上递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(-3)$，

即 $f'(x)_{\min}=f'(-3)=-e^{-3}-1<0$，

又 $x\to+\infty$，$f'(x)\to+\infty$，$x<-3$，$f'(x)<0$，

且 $f'(0)=1>0$，$f'(-1)=\frac{1}{e}-1<0$，

∴ $\exists x_0\in(-1,0)$，使得 $f'(x_0)=0$，即 $(x_0+2)e^{x_0}-1=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$，

当 $x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，当 $x>x_0$ 时，$f\text{¢}(x)>0$，

所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 上递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上递增，

所以 $f(x)_{\min}=f(x_0)=(x_0+1)(e^{x_0}-1)=(x_0+1)\left(\frac{1}{x_0+2}-1\right)$

$=-\frac{(x_0+1)^2}{(x_0+2)}=-\frac{[(x_0+2)-1]^2}{(x_0+2)}=-\left[(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}-2\right]$，

∵ $x_0\in(-1,0)$，∴ $x_0+2\in(1,2)$，

令 $h(x)=x+\frac{1}{x},x\in(1,2)$，则 $h'(x)=1-\frac{1}{x^2}>0,x\in(1,2)$，

所以函数 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上递增，故 $(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}\in\left(2,\frac{5}{2}\right)$，

所以 $-\left[(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}-2\right]\in\left(-\frac{1}{2},0\right)$，

即 $f(x)_{\min}>-\frac{1}{2}$，　　∴ $m>-\frac{1}{2}$；

②解：成立，理由如下：

当直线过 $(-1,0)$，$(x_0,f(x_0))$ 时割线方程为 $y=-\frac{(x_0+1)}{(x_0+2)}(x+1)=m$，得 $x_3=\frac{-m(x_0+2)}{(x_0+1)}-1$，

当直线过 $(0,0)$，$(x_0,f(x_0))$ 时割线方程为 $y=\frac{-(x_0+1)^2}{x_0(x_0+2)}x=m$，得 $x_4=\frac{-mx_0(x_0+2)}{(x_0+1)^2}$，

∴ $|x_1-x_2|>x_4-x_3=\frac{m(x_0+2)}{(x_0+1)^2}+1=\frac{m}{(x_0+2)+\frac{1}{x_0+2}-2}+1>2m+1$.

选考题

22.(1) $\sqrt{5-2\sqrt{3}}$　　**(2)** $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

【详解】（1）将 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 代入方程 $\rho=2\cos 2\theta$，得，$\rho_P=2\cos\frac{\pi}{3}=1$，则 P 的极坐标为 $\left(1,\frac{\pi}{6}\right)$.

又 G 与极轴的交点为 Q 的极坐标为 $(2,0)$.则 $|PQ|=\sqrt{1^2+2^2-2\times1\times2\times\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{5-2\sqrt{3}}$.

（2）不妨设 $A(\rho_A,\theta)(0\le\theta\le\pi)$，$B\left(\rho_B,\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$，则 $\rho_A=2\cos 2\theta$，$\rho_B=2\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$

所以，$\triangle AOB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|\rho_A\rho_B|\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}|\rho_A\rho_B|$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4\left|\cos 2\theta\cos\left(2\theta+\frac{4\pi}{3}\right)\right|=\left|\sqrt{3}\cos 2\theta\left(-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta\right)\right|$

$=\left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos^2 2\theta+\frac{3}{2}\sin 2\theta\cos 2\theta\right|=\left|-\frac{\sqrt{3}}{4}(1+\cos 4\theta)+\frac{3}{4}\sin 4\theta\right|$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|\sqrt{3}\sin 4\theta-1-\cos 4\theta\right|=\frac{\sqrt{3}}{4}\left|2\sin\left(4\theta-\frac{\pi}{6}\right)-1\right|$

所以，当 $4\theta-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{2}$，即 $\theta=\frac{5\pi}{12}$ 时，$S_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

所以，$\triangle AOB$ 面积S最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

23.【答案】(1) $\left[-\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right]$　　**(2)证明见解析**

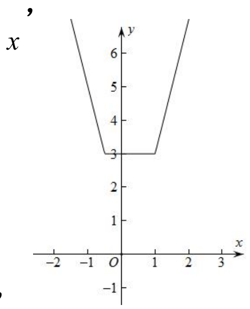
【详解】（1）解：因为 $f(x)=|2x-2|+|2x+1|=\begin{cases}4x-1,x>1\\3,-\frac{1}{2}\le x\le 1\\1-4x,x<-\frac{1}{2}\end{cases}$，

所以不等式 $f(x)\le 4+x$，即 $\begin{cases}x>1\\4x-1\le 4+x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-\frac{1}{2}\le x\le 1\\3\le 4+x\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x<-\frac{1}{2}\\1-4x\le 4+x\end{cases}$，

解得 $1<x\le\frac{5}{3}$ 或 $-\frac{1}{2}\le x\le 1$ 或 $-\frac{3}{5}\le x<-\frac{1}{2}$，

综上可得原不等式的解集为 $\left[-\frac{3}{5},\frac{5}{3}\right]$.

（2）解：由（1）可得函数 $f(x)$ 的图象如右所示：



所以 $f(x)_{\min}=3$，即 $T=3$，所以 $a+b+c=3$，又 $a>0$，$b>0$，$c>0$，

所以 $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}=\sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{1}{2}ab}+\sqrt{\frac{1}{2}ac}\right)\le\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}a+c\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b+c)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $b=c=\frac{1}{2}a=\frac{3}{4}$ 时取等号，所以 $\sqrt{ab}+\sqrt{ac}\le\frac{3\sqrt{2}}{2}$.