射洪中学高2020级高三下学期入学考试
文科数学试题参考答案

一、选择题

1-5． BABDC　　6-10． ABCDB

11． 【答案】C

【分析】由 $p\vee q$ 为真命题，$p\wedge q$ 为假命题，确定 p，q 一真一假，再结合命题内容，进行辨析即可.

【详解】$\because p\vee q$ 为真命题，$p\wedge q$ 为假命题，

$\therefore$命题 p 与命题 q 中，恰有一个为真命题，另一个为假命题；

（1）若命题 p："甲得第一"为真命题，命题 q："乙得第二"为假命题，

则甲得第一，乙未得第二，$\therefore$乙得第三，$\therefore$命题 r："丙得第三"为假命题，

此时 $(\neg p)\wedge r$ 为假命题满足题意，前三名的顺序为：甲得第一，丙得第二，乙得第三；

（2）若命题 p："甲得第一"为假命题，命题 q："乙得第二"为真命题，

则乙得第二，甲未得第一，$\therefore$甲得第三，$\therefore$命题 r："丙得第三"为假命题，

此时 $(\neg p)\wedge r$ 为假命题满足题意，前三名的顺序为：丙得第一，乙得第二，甲得第三.

对于 A，第（1）种情况中，甲得第一，满足题意，故选项 A 说法不正确；

对于 B，第（2）种情况中，乙得第二，满足题意，故选项 B 说法不正确；

对于 C，（1）、（2）两种情况中，丙均不是第三，故选项 C 说法正确；

对于 D，（1）、（2）两种情况中，存在两种不同顺序，故根据题设不能确定甲、乙、丙的顺序，故选项 D 说法不正确.故选：C.

12． 【答案】A【分析】根据最小正周期求出 ω，根据函数图像过点 $\left(\frac{1}{3},1\right)$ 求出 φ 的值，再根据复合函数画出外层函数的图像，求出右端点的范围.

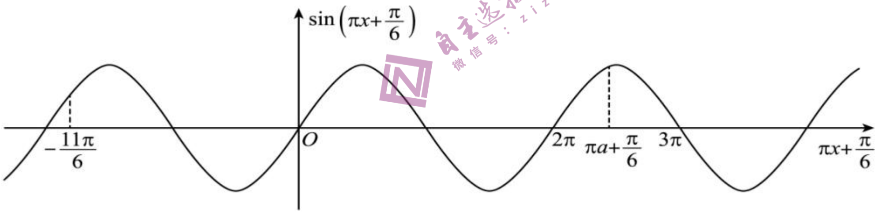
【详解】$\because f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\pi)$ 的最小正周期为 2

$\therefore \frac{2\pi}{\omega}=2\ \therefore \omega=\pi\qquad \therefore f(x)=\sin(\pi x+\varphi)(|\varphi|<\pi)$

又$\because$ 函数 $f(x)=\sin(\pi x+\varphi)(|\varphi|<\pi)$ 过点 $\left(\frac{1}{3},1\right)$，　即 $f\left(\frac{1}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=1$，又$\because|\varphi|<\pi$

$\therefore \frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}\ \therefore \varphi=\frac{\pi}{6}\qquad \therefore f(x)=\sin\left(\pi x+\frac{\pi}{6}\right)\qquad$ 又$\because x\in[-2,a]$，$\therefore \pi x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{11\pi}{6},\pi a+\frac{\pi}{6}\right]$

若 $f(x)$ 在区间 $[-2,a]$ 内有 4 个零点，如图，则满足　$2\pi\le\pi a+\frac{\pi}{6}<3\pi$　所以 $a\in\left[\frac{11}{6},\frac{17}{6}\right)$



故选：A

二、填空题

13． $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　14． $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　15．【答案】-4

【分析】由向量的线性运算得 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM})$，然后计算数量积可得.

【详解】由已知 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM})$，

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}=(\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA})\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BM})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BM}^2-\overrightarrow{BA}^2)=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BA})^2=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{4}\times2^2-3^2)=-4$.

故答案为：-4.

16. 【答案】①③④

【分析】过点 P,A 分别作准线的垂线，垂足分别为 P',A'，进而根据抛物线的定义判断①；根据 $|AB|=x_1+x_2+2>2$ 判断②；设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(x_1,x_2>0)$，进而联立方程，结合韦达定理，根据 $|AF|\cdot|BF|=x_1x_2+x_1+x_2+1$ 解方程即可得判断③；根据直线与曲线的位置关系得过点 A,B，分别与抛物线 C 相切的直线方程为 $4x-2y_1y+y_1^2=0$，$4x-2y_2y+y_2^2=0$，进而联立方程解得 $x=\dfrac{y_1y_2}{4}=-1$ 可判断④.

【详解】解：由题知 $p=2$，$F(1,0)$，准线方程为 $x=-1$，

对于①选项，如图，过点 P,A 分别作准线的垂线，垂足分别为 P',A'，故 $|AF|+|AP|=|AA'|+|AP|\geq|PP'|=3$，故正确；

对于②选项，设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)(x_1,x_2>0)$，故 $|AB|=|AF|+|BF|=x_1+x_2+p=x_1+x_2+2>2$，故错误；

对于③选项，当直线 AB 的斜率不存在时，$|AF|\cdot|BF|=4$，不成立；

故直线 AB 的斜率存在，设方程为 $y=k(x-1)$，与抛物线方程联立 $\begin{cases}y^2=4x\\y=k(x-1)\end{cases}$ 得

$k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，　所以 $x_1+x_2=\dfrac{2k^2+4}{k^2},x_1x_2=1$，

因为 $|AF|\cdot|BF|=(x_1+1)(x_2+1)=x_1x_2+x_1+x_2+1=12$，

所以 $\dfrac{2k^2+4}{k^2}=10$，即 $k^2=\dfrac{1}{2}$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故正确；

对于④选项，设过点 A 与抛物线 C 相切的直线方程为 $y-y_1=m(x-x_1)$，

与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立得 $y^2-\dfrac{4}{m}y+\dfrac{4}{m}y_1-4x_1=y^2-\dfrac{4}{m}y+\dfrac{4}{m}y_1-y_1^2=0$，

所以 $\Delta=\dfrac{16}{m^2}-4\left(\dfrac{4}{m}y_1-y_1^2\right)=0$，整理得 $\dfrac{4}{m^2}-\dfrac{4}{m}y_1+y_1^2=\left(\dfrac{2}{m}-y_1\right)^2=0$，

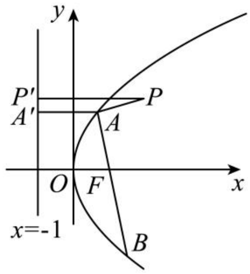
所以 $\dfrac{2}{y_1}=m$，故 $y-y_1=m(x-x_1)$ 即为 $y-y_1=\dfrac{2}{y_1}(x-x_1)$，整理得 $4x-2y_1y+y_1^2=0$

同理得过点 B 与抛物线 C 相切的直线方程为 $4x-2y_2y+y_2^2=0$，

所以，联立方程 $\begin{cases}4x-2y_2y+y_2^2=0\\4x-2y_1y+y_1^2=0\end{cases}$，解方程得 $x=\dfrac{y_1y_2}{4}$，

因为 $y_2^2y_1^2=16x_1x_2=16,y_1y_2<0$，所以 $y_1y_2=-4$

所以 $x=\dfrac{y_1y_2}{4}=-1$，即点 Q 的横坐标为 -1，故正确. 故选：①③④



三、解答题

17.解：(1) 因为 $(0.025+0.125)\times2=0.3<0.5$，$0.3+0.200\times2=0.7>0.5$，

所以该产品这一质量指数的中位数在 $[14,16)$ 内，

设该产品这一质量指数的中位数为 m，则 $(m-14)\times0.2+0.3=0.5$，　解得 $m=15$；

(2) 由频率分布直方图可得 $100\times0.100\times2=20,100\times0.050\times2=10$，

即在 $[16,18)$ 和 $[18,20]$ 的产品分别由 $20,10$ 件，

采用分层抽样的方法抽取的 6 件产品中这一质量指数在 $[16,18)$ 内的有 4 件，记为 a,b,c,d，这一质量指数在 $[18,20]$ 内的有 2 件，记为 e,f，

从这 6 件产品中随机抽取 2 件的情况有 $ab,ac,ad,ae,af,bc,bd,be,bf,cd,ce,cf,de,df,ef$，

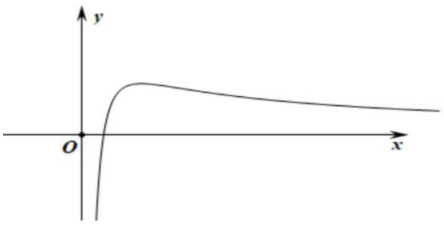
共 15 种；其中符合条件的情况有 ae,af,be,bf,ce,cf,de,df，共 8 种，　故所求概率 $P=\dfrac{8}{15}$.

18．解：（1）设等比数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，
由$a_4=a_3+8$得：$a_2q^2=a_2q+8$，$\therefore 4q^2=4q+8$，解得：$q=-1$（舍）或$q=2$，$\therefore a_n=a_2q^{n-2}=2^n$.
（2）由（1）得：$b_n=\log_2 2^n=n$，$\therefore a_n\cdot b_n=n\cdot 2^n$，
$\therefore S_n=1\times 2^1+2\times 2^2+3\times 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$，$2S_n=1\times 2^2+2\times 2^3+3\times 2^4+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1}$，
$\therefore -S_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot 2^{n+1}=\dfrac{2(1-2^n)}{1-2}-n\cdot 2^{n+1}=(1-n)\cdot 2^{n+1}-2$，　$\therefore S_n=(n-1)\cdot 2^{n+1}+2$.

19．解：（1）因为$AD\,/\!/\,BC,Q$为AD的中点，$BC=\dfrac{1}{2}AD$，所以$BC=QD$，
又因为$BC\,/\!/\,QD$，所以四边形$BCDQ$为平行四边形，
因为$\angle ADC=90^\circ$，所以平行四边形$BCDQ$是矩形，所以$BC\perp BQ$，
因为$PA=PD,AQ=QD$，所以$PQ\perp AD$，
又因为平面$PAD\perp$平面$ABCD$，平面$PAD\cap$平面$ABCD=AD,PQ\subset$平面PAD，
所以$PQ\perp$平面$ABCD$，因为$BC\subset$平面$ABCD$，所以$PQ\perp BC$，
又因为$PQ\cap BQ=Q,PQ,BQ\subset$平面PQB，所以$BC\perp$平面PQB.
（2）因为$PA=PD=\sqrt{2},AD=2$，
所以$PQ=AQ=1$，
由$PQ\perp$平面$ABCD,M$为PC中点，所以点M到平面$ABCD$的距离等于$\dfrac{1}{2}PQ$，
所以$V_{A-BMQ}=V_{M-AQB}=\dfrac{1}{2}V_{P-AQB}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3})\times 1=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

20．【分析】（1）求导得$f'(x)=\dfrac{ax-1}{x}$，再根据$a\le 0,a>0$分类结论即可；
（2）分离参数得$a=\dfrac{1+\ln x}{x}$，令$h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，借助$h(x)$的图象单调性分析即得a的范围.

解:（1）函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$，
当$a\le 0$时，$f'(x)<0$恒成立，故函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；当$a>0$时，令$f'(x)<0$，得$0<x<\dfrac{1}{a}$，令$f'(x)>0$，得$x>\dfrac{1}{a}$，故函数$f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$上单调递增.
（2）函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上有两个不同的零点，
等价于方程$ax-\ln x-1=0$在$(0,+\infty)$上有两个不等实根，　即$a=\dfrac{1+\ln x}{x}$有两个解，
令$h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则$h'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，　令$h'(x)<0$，得$x>1$，令$h'(x)>0$，得$0<x<1$，
$\therefore$函数$h(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，$\therefore h(x)_{\max}=h(1)=1$，
$\because x\to 0^+$时，$h(x)\to-\infty$，当$x>1$时，$h(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}>0$，
所以函数$h(x)$的图象大致如下：



$\therefore 0<a<1$，　$\therefore a$的范围是$(0,1)$.
【点睛】导数的几何意义；导数的运算；利用导数研究函数的单调性；利用导数研究函数的极值；利用导数研究曲线上某点切线方程.
（1）根据导数的计算公式，结合导数的几何意义，以及直线的方程求解即可；
（2）利用导数研究函数的极值与单调性求解即可；
（3）根据化归思想，将不等式恒成立问题等价转化为求函数的最值问题，利用导数研究函数的单调性与最值求解即可.

21．【分析】（1）由短轴长及离心率求得参数a、b即可；

（2）由 $BP//OQ$ 分析得 $\dfrac{EQ}{EP}=\dfrac{3}{2}$，即 $x_2=\dfrac{3}{2}x_1$，联立直线方程与椭圆方程结合韦达定理可解得 k；

（3）直接由斜率公式化简求值即可.

【详解】(1) 短轴长 $2b=4\Rightarrow b=2$，离心率是 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a=2\sqrt{2}$，∴椭圆 C 的方程为

$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$.全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

（2）直线 l 交 y 轴于 $E(0,-6)$，因为 $BP//OQ$，则 $\dfrac{EQ}{EP}=\dfrac{EO}{EB}=\dfrac{3}{2}$，所以 $x_2=\dfrac{3}{2}x_1$，

联立直线方程与椭圆方程得 $(2k^2+1)x^2-24kx+64=0$，由 $\Delta>0$ 得 $k>2$ 或 $k<-2$，

由韦达定理得 $x_1+x_2=\dfrac{24k}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{64}{2k^2+1}$，把 $x_2=\dfrac{3}{2}x_1$ 代入上式得 $\dfrac{5}{2}x_1=\dfrac{24k}{2k^2+1}$ ①，

$\dfrac{3}{2}x_1^2=\dfrac{64}{2k^2+1}$ ②，$\dfrac{①^2}{②}$ 得 $4k^2=25$，解得 $k=\pm\dfrac{5}{2}$，符合 $k>2$ 或 $k<-2$，所以 $k=\pm\dfrac{5}{2}$.

（3）证明：由韦达定理得 $kx_1x_2=\dfrac{64k}{2k^2+1}=\dfrac{8}{3}(x_1+x_2)$，

$$\frac{k_{AQ}}{k_{BP}}=\frac{\frac{y_2-2}{x_2}}{\frac{y_1+2}{x_1}}=\frac{x_1(y_2-2)}{x_2(y_1+2)}=\frac{kx_1x_2-8x_1}{kx_1x_2-4x_2}=\frac{\frac{8}{3}(x_1+x_2)-8x_1}{\frac{8}{3}(x_1+x_2)-4x_2}=\frac{-\frac{16}{3}x_1+\frac{8}{3}x_2}{\frac{8}{3}x_1-\frac{4}{3}x_2}=-2$$

22．解:（1）由 $\rho\sin^2\theta=4\cos\theta$ 得，$\rho^2\sin^2\theta=4\rho\cos\theta$，将 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，代入得 $y^2=4x$.

当 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$\begin{cases}x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$，消去 t，得 $x-y-1=0$.

∴曲线 C 的直角坐标方程为 $y^2=4x$，直线 l 的普通方程为 $x-y-1=0$.

（2）设 A，B 对应的参数分别为 t_1，t_2，将 $\begin{cases}x=1+t\cos\varphi\\ y=t\sin\varphi\end{cases}$ 代入 $y^2=4x$ 得，

$t^2\sin^2\varphi-4t\cos\varphi-4=0$，∴$t_1+t_2=\dfrac{4\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$，$t_1t_2=\dfrac{-4}{\sin^2\varphi}<0$，∴$t_1$，$t_2$ 异号，

∴$\big||AF|-|BF|\big|=\big||t_1|-|t_2|\big|=|t_1+t_2|=\dfrac{8}{3}$，∴$\left|\dfrac{4\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\right|=\dfrac{8}{3}$，

解得 $\cos\varphi=\dfrac{1}{2}$ 或 $\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}$. ∵$\varphi\in(0,\pi)$，∴$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\varphi=\dfrac{2\pi}{3}$，∴直线 l 的倾斜角为 $\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$.

23．解:（1）由题知：$f(x)=|x-2|+|2x+1|$，$\begin{cases}x<-\dfrac{1}{2}\\ -(x-2)-(2x+1)\le 4\end{cases}\Rightarrow -1\le x<-\dfrac{1}{2}$，

$\begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x<2\\ -(x-2)+(2x+1)\le 4\end{cases}\Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le 1$，$\begin{cases}x\ge 2\\ x-2+2x+1\le 4\end{cases}\Rightarrow\varnothing$，

综上：所求不等式解集为 $\{x\,|\,-1\le x\le 1\}$.

（2）存在实数 x_0，使得不等式 $|x_0-2|+f(x_0)<3$，

即存在实数 x_0，使得不等式 $|2x_0-4|+|2x_0+m|<3$ 有解，

因为 $|2x_0-4|+|2x_0+m|=|4-2x_0|+|2x_0+m|\ge|4-2x_0+2x_0+m|=|4+m|$，$(4-2x_0)(2x_0+m)\ge 0$ 时取等

号，所以$|4+m|<5$，解得$-5<4+m<5$，即$-9<m<1$.