



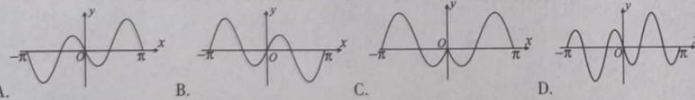
1号卷·A10联盟高二年级(2021级)下学期6月学情调研考试 数学试题

本试卷分第I卷(选择题)和第II卷(非选择题)两部分,满分150分,考试时间120分钟。

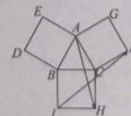
第I卷(选择题 共60分)

一、选择题(本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

- 若集合 $A = \{x | x^2 + 16 < 10x\}$, $B = \{x | x > 5\}$, 则 $A \cup B =$ ()
A. $\{x | x > 2\}$ B. $\{x | 2 < x < 5\}$ C. $\{x | 5 < x < 8\}$ D. $\{x | x > 8\}$
- 若曲线 $y = x^2 - \ln x$ 的一条切线的斜率是 -1 , 则切点的横坐标为 ()
A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. e
- 通用技术结业课程上,老师带领大家设计一个圆台状的器皿(材料的厚度忽略不计),该器皿下底面半径为3cm,上底面半径为18cm,容积为 $1935\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$,则该器皿的高为 ()
A. $5\sqrt{3} \text{ cm}$ B. $12\sqrt{3} \text{ cm}$ C. $15\sqrt{3} \text{ cm}$ D. $20\sqrt{3} \text{ cm}$
- 棣莫佛公式 $[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ (i 为虚数单位, $r > 0$) 是由法国数学家棣莫佛发现的。根据棣莫佛公式,复数 $z = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right) \right]^4$ 的虚部为 ()
A. $-\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{8}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{8}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{8}$
- 若直线 $l \subset$ 平面 α , 直线 $m \subset$ 平面 β , 则“ $l \parallel \beta$ ”的一个必要不充分条件是 ()
A. $\alpha \parallel \beta$ B. l, m 共面 C. $m \parallel \alpha$ D. l, m 无交点
- 音乐与数学在某些领域息息相关。比如在音乐中可以用正弦函数来表示单音,用正弦函数相叠加表示和弦。已知某和弦可表示为函数 $f(x) = \sin x - 2 \sin 2x$, 则 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象大致为 ()



- 正多边形具有对称美的特点,很多建筑设计都围绕这一特点展开。已知某公园的平面设计图如图所示, $\triangle ABC$ 是边长为2的等边三角形,四边形 $ABDE, AGFC, BCHI$ 都是正方形,则 $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{IF} =$ ()
A. $4 - 2\sqrt{3}$ B. $-4 - 2\sqrt{3}$ C. $2 - 4\sqrt{3}$ D. $-2 - 4\sqrt{3}$



- 18世纪数学家欧拉在研究调和级数时得到了这样的成果:当 n 很大时, $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \ln n + r$ (r 为常数)。

基于上述事实,已知 $a = \sum_{i=30001}^{40000} \frac{1}{i} - \frac{4}{3}$, $b = \sum_{i=50001}^{60000} \frac{1}{i} - \frac{6}{5}$, $c = \sum_{i=70001}^{90000} \frac{1}{i} - \frac{9}{7}$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()
A. $a > c > b$ B. $c > a > b$ C. $a > b > c$ D. $b > c > a$

二、选择题(本题共4小题,每小题5分,共20分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得5分,部分选对的得2分,有选错的得0分。)

- 将函数 $f(x) = 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$ 的图象的横坐标伸长为原来的2倍后,再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图象,则 ()
A. $g(x)$ 的周期为 $\frac{2\pi}{3}$ B. $g(\pi) = -\sqrt{2}$
C. $g \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = g(-x)$ D. $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{3}, 0 \right]$ 上单调递减
- 某中学共有1000名学生,其中初中生600人,身高的平均数为160,方差为100,高中生400人,身高的平均数为170,方差为200,则下列说法正确的是 ()
A. 该中学所有学生身高的平均数为164 B. 该中学所有学生身高的平均数为162
C. 该中学所有学生身高的方差为162 D. 该中学所有学生身高的方差为164
- 已知 O 为坐标原点,抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点 F 到其准线的距离为4,过点 F 作直线 l 交 C 于 M, N 两点,则 ()
A. C 的准线为 $x = -2$ B. $\angle MON$ 的大小可能为 $\frac{\pi}{2}$
C. $|MN|$ 的最小值为8 D. $|MF| \cdot |NF| = 2(|MF| + |NF|)$
- 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M, N 分别是棱 BC, BB_1 的中点, $\overrightarrow{CP} = \lambda \overrightarrow{CC_1}$, $\lambda \in [0, 1]$, 则 ()
A. 存在 λ 使得 $MN \perp$ 平面 AMP
B. 存在 λ 使得 $AN \parallel$ 平面 DMP
C. 当 $\lambda = \frac{2}{3}$ 时,平面 AMP 截正方体所得的截面形状是五边形
D. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时,异面直线 AP 与 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

第II卷 (非选择题 共90分)

三、填空题 (本题共4小题, 每小题5分, 共20分.)

13. 公元前1800年, 古埃及的“加罕纸草书”上有这样一个问题: 将100德本 (德本是古埃及的重量单位) 的食物分成10份, 第一份最大, 从第二份开始, 每份比前一份少 $\frac{5}{6}$ 德本, 求各份的大小. 在这个问题中, 最小的一份是_____德本.
14. 已知圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2 + 25 (r \in \mathbf{N}^*)$, $M(-1, 0)$, $N(1, 0)$, 若以线段 MN 为直径的圆与圆 C 有公共点, 则 r 的值可能为_____. (写出一个即可)
15. 某商场在过道上设有两排座位 (每排4座) 供顾客休息, 小明、小红等四位同学去商场购物后坐在座位上休息, 已知该时段座位上空无一人, 则不同的坐法有_____种; 若小明和小红坐在同一排, 且每排都要有人坐, 则不同的坐法有_____种. (用数字作答, 第一空2分, 第二空3分)
16. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 点 A 在 C 上, O 为坐标原点, 且 $\angle OAF = \angle OFA = \frac{\pi}{6}$, 则 C 的离心率是_____.

四、解答题 (本题共6小题, 第17题10分, 第18-22题每题12分, 共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分10分)
在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 且 $c = 2(b \cos C - a)$.
(1) 求角 B 的大小;
(2) 若 $b = 4\sqrt{3}$, D 为线段 AC 的中点, $BD = 2$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

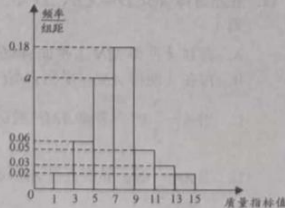
18. (本小题满分12分)
设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = 1$, 点 $(a_{n+1}, S_n) (n \in \mathbf{N}^*)$ 在直线 $y = x - 1$ 上.
(1) 求 a_2 及 a_n ;

- (2) 记 $b_n = \begin{cases} a_n, & n \text{ 为偶数} \\ 1 + \log_2 a_n, & n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前20项和 T_{20} .

19. (本小题满分12分)

为了检查新机器的生产情况, 某公司对该机器生产的部分产品的质量指标进行检测, 所得数据统计如图所示.

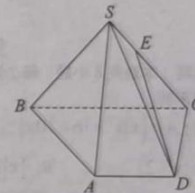
- (1) 求 a 的值以及被抽查产品的质量指标的平均值;
(2) 以频率估计概率, 若从所有产品中随机抽取4件, 记质量指标值在 $[3, 7)$ 的产品数量为 X , 求 X 的分布列以及数学期望 $E(X)$.



20. (本小题满分12分)

如图, 在四棱锥 $S-ABCD$ 中, $\angle CBA = \frac{1}{2} \angle BAD = \frac{4}{3} \angle SBC = 60^\circ$, $SA = AB = BC = 2AD = \sqrt{2}SB$.

- (1) 求证: 平面 $SBC \perp$ 平面 SCD ;
(2) 若点 E 是线段 SC 上靠近 S 的三等分点, 求直线 DE 与平面 SAB 所成角的正弦值.



21. (本小题满分12分)

已知直线 $l: mx + y - 2m - 3 = 0$ 过定点 A , 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过点 A , 且 C 的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$.

- (1) 求点 A 的坐标和 C 的方程;
(2) 若直线 $l': y = kx + 1 (k \neq 1)$ 与 C 交于 M, N 两点, 试探究: 直线 AM, AN 的斜率之和是否为定值, 若是, 求出该定值; 若不是, 请说明理由.

22. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = xe^{1-x} + ax^3 - x (a \in \mathbf{R})$.

- (1) 若 $a = \frac{1}{3}$, 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上的单调性;
(2) 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq x \ln x + a$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线