★2023 年 10 月 25 日

2023—2024 学年度高三阶段性考试

数 学

注意事项：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.

2. 选择题答案使用 2B 铅笔填涂，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号；非选择题答案使用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔书写，字体工整、笔迹清楚.

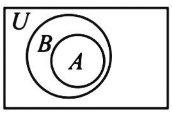
3. 请按照题号在各题的答题区域（黑色线框）内作答，超出答题区域书写的答案无效.

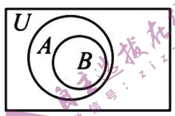
4. 考试结束后，将答题卡交回.

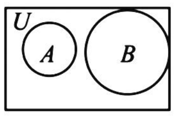
第 I 卷（选择题）

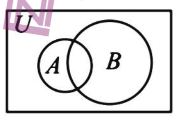
一、 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 全集 $U=\mathbf{R}$，能表示集合 $A=\{-2,-1,0\}$ 和 $B=\{x\mid x^2-x-2\le 0\}$ 关系的 Venn 图是

A. 

B. 

C. 

D. 

2. “$xy>1$”是“$x>1,y>1$”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3. 复数 $z=\cos\frac{2\pi}{3}-\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$，则复数的 $z^3=$

A. 1　　B. -1　　C. i　　D. $-\mathrm{i}$

4. 已知 b 克糖水中含有 a 克糖 $(b>a>0)$，再添加 m $(m>0)$ 克糖（假设全部溶解），糖水变甜了，能恰当表示这一事实的不等式为

A. $bm>am$　　B. $b+m>a+m$　　C. $\frac{m}{a}>\frac{m}{b}$　　D. $\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$

5. 已知 $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$，且 α 为锐角，则 $\cos 2\alpha=$

A. $-\frac{12}{25}$　　B. $\frac{12}{25}$　　C. $-\frac{24}{25}$　　D. $\frac{24}{25}$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1),\boldsymbol{b}=(1,n)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为

A. $(2,1)$　　B. $(-\sqrt{2},1)$　　C. $(1,2)$　　D. $(-1,-\sqrt{2})$

7. 已知 a，b，c，均大于 1，满足 $\dfrac{2a-1}{a-1}=2+2\log_2 a$，$\dfrac{3b-2}{b-1}=3+3\log_3 b$，$\dfrac{5c-4}{c-1}=5+5\log_5 c$，则下列不等式成立的是

A. $c<b<a$　　B. $c<a<b$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

8. 已知直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\sqrt{x}+1$ 的切线，则 k^2+b^2-2b 的最小值为

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. 0　　C. $\dfrac{5}{4}$　　D. 3

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的或不选的得 0 分.

9. $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，D 为 BC 的中点.下列正确的是

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$　　B. $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

C. $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$　　D. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2$

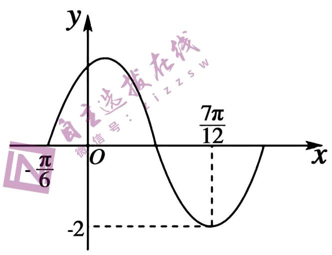
10. 已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（其中 $A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$）的部分图象如图所示，则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{2\pi}{3}$ 对称

C. $f(x)=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$

D. $\dfrac{\pi}{3}$ 是 $f(x)$ 的一个零点



11. 判断平面 α 与平面 β 平行的条件可以是

A. 平面 α 内有无数条直线都与 β 平行

B. 平面 $\gamma // \alpha$，且平面 $\gamma // \beta$

C. 直线 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，且 $a//\beta$，$b//\alpha$

D. 平面 α 内有两条不平行的直线都平行于平面 β

12. 已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和，则下列结论成立的有

A. 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且 $a_n>0$，则数列 $\{\log_3 a_n\}$ 为等差数列

B. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $\dfrac{S_3}{S_6}=\dfrac{1}{4}$，则 $\dfrac{S_6}{S_{12}}=\dfrac{1}{4}$

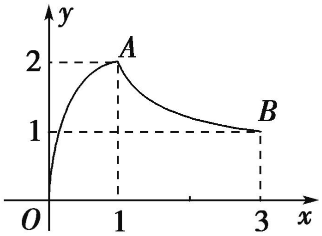
C. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前 10 项中，偶数项的和与奇数项的和之比为 $9:8$，且 $S_{10}=170$，则公差为 2

D. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2a_2=2$，且 $a_{n+2}=|a_{n+1}-a_n|$，则该数列的前 100 项和 $S_{100}=67$

第Ⅱ卷（非选择题）

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 如图，函数 $f\left(x\right)$ 的图象是曲线 OAB，其中点 O，A，B 的坐标分别为 $(0,0)$，$(1,2)$，$(3,1)$，则 $f\left(f(3)\right)$ 的值等于______.



14. 已知等比数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_3+a_6=36, a_4+a_7=18$. 若 $a_m=\dfrac{1}{2}$，则 $m=$______.

15. 若点 $A(\cos\theta,\sin\theta)$ 关于 y 轴的对称点为 $B(\cos(\theta+\dfrac{\pi}{6}),\sin(\theta+\dfrac{\pi}{6}))$，则 θ 的一个取值为______.

16. 关于 x 的不等式 $(x-1)^{2023}-2^{2023}\cdot x^{2023}\le x+1$ 的解集为______.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 10 分）

已知在等差数列 $\left\{a_n\right\}$ 中，$a_3=5$，$a_{17}=3a_6$.

（1）求数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式；

（2）设 $b_n=\dfrac{2}{n(a_n+3)}$，求数列 $\left\{b_n\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

18. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的单调增区间；

（2）将函数 $y=f\left(x\right)$ 图象上点的横坐标伸长为原来的 2 倍（纵坐标不变），再把所得函数图象向下平移 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 个单位得到函数 $g\left(x\right)$ 的图象，求 $g\left(x\right)$ 的最小值及取得最小值时的 x 的取值集合.

19. （本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=x-\frac{2}{x}-a\left(\ln x-\frac{1}{x^{2}}\right)$， $a\in\mathrm{R}$.

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a>0$ 时，记 $f(x)$ 的最小值为 $g(a)$，证明： $g(a)<1$.

20. （本小题满分 12 分）

在 ΔABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，已知 $2c\sin B=(2a-c)\tan C$，角 C 的内角平分线与边 AB 交于点 E,

（1）求角 B 的大小；

（2）记 $\triangle BCE$，$\triangle ACE$ 的面积分别为 S_1,S_2，在① $c=2,b=\sqrt{3}$，② $S_{\triangle ABC}=\frac{3\sqrt{3}}{4},b=\sqrt{7},A>C$ 这两个条件中任选一个作为已知，求 $\frac{S_1}{S_2}$ 的值. 注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

21. （本小题满分 12 分）

已知抛物线 $C:x^{2}=2py(p>0)$，直线 $l:y=kx+2$ 与 C 交于 A,B 两点且 $OA\perp OB$（ O 为坐标原点）.

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）设 $P(2,2)$，若直线 PA,PB 的倾斜角互补，求 k 的值.

22. （本小题满分 12 分）

设 $a\in\mathbf{R}$， 函数 $f(x)=x^{2}\mathrm{e}^{1-x}-a(x-1)$.

（1）当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 在 $(\frac{3}{4},2)$ 内的极值；

（2）设函数 $g(x)=f(x)+a(x-1-e^{1-x})$，当 $g(x)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$ 时，总有 $x_2g(x_1)\le\lambda f'(x_1)$，求实数 λ 的值.