长沙市一中2023届高三月考试卷(六)

数 学

时量：120分钟　　满分：150分

一、单项选择题(本题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.)

1.已知集合 $M=\{x|x=3n-2,n\in \mathbf{Z}\}$，$N=\{-2,-1,0,1,2\}$，则 $M\cap N=$(　　)

A.$\{-2,1\}$　　B.$\{-1,2\}$　　C.$\{-1,1\}$　　D.$\{-2,0,2\}$

2.已知复数 z 满足 $z(1-\mathrm{i})=|1+\mathrm{i}|$，i 为虚数单位，则 $z=$(　　)

A.i　　B.$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$　　C.$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$　　D.$1+\mathrm{i}$

3.已知 $A(-3,0)$，$B(3,0)$，$C(0,3)$，一束光线从点 $F(-1,0)$ 出发经 AC 反射后，再经 BC 上点 D 反射，落到点 $E(1,0)$ 上.则点 D 的坐标为(　　)

A.$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$　　B.$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$　　C.$(1,2)$　　D.$(2,1)$

4.若 $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4}\right)$，且 $\cos^2\alpha+\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2\alpha\right)=-\frac{1}{2}$，则 $\tan\alpha=$(　　)

A.$-\sqrt{3}$　　B.-2　　C.-3　　D.$-2\sqrt{3}$

5.据一组样本数据 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，…，(x_n,y_n)，求得经验回归方程为 $\hat{y}=1.2x+0.4$，且 $\overline{x}=3$.现发现这组样本数据中有两个样本点 $(1.2,0.5)$ 和 $(4.8,7.5)$ 误差较大，去除后重新求得的经验回归直线 l 的斜率为1.1，则(　　)

A.去除两个误差较大的样本点后，y 的估计值增加速度变快

B.去除两个误差较大的样本点后，重新求得的回归方程一定过点 $(3,5)$

C.去除两个误差较大的样本点后，重新求得的回归方程为 $\hat{y}=1.1x+0.7$

D.去除两个误差较大的样本点后，相应于样本点 $(2,2.7)$ 的残差为0.1

6.在四面体 $PABC$ 中，$PA\perp AB$，$PA\perp AC$，$\angle BAC=120^\circ$，$AB=AC=AP=2$，则该四面体的外接球的表面积为(　　)

A.12π　　B.16π　　C.18π　　D.20π

7.已知圆 O 的半径为1，A 为圆内一点，$OA=\frac{1}{2}$，B，C 为圆 O 上任意两点，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的最小值是(　　)

A. $-\frac{1}{8}$　　　　B. $-\frac{1}{16}$

C. $\frac{1}{16}$　　　　D. $\frac{1}{8}$

8.设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数，若 $f(x)+x^2$ 是奇函数，$f(x)-x$ 是偶函数，函数 $g(x)=\begin{cases}f(x),x\in[0,1]\\2g(x-1),x\in(1,+\infty)\end{cases}$，若对任意的 $x\in[0,m]$，$g(x)\le 3$ 恒成立，则实数 m 的最大值为(　　)

A. $\frac{13}{3}$　　　　B. $\frac{17}{4}$

C. $\frac{9}{2}$　　　　D. $\frac{14}{3}$

二、多项选择题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.)

9.已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有3条对称轴，给出下列四个结论，正确的是(　　)

A. ω 的取值范围是 $\left[\frac{9}{4},\frac{13}{4}\right)$

B. $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有3个不同的零点

C. $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{4\pi}{5}$

D. $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$ 上单调递增

10.已知抛物线 $C:x^2=2y$ 的焦点为 F，准线为 l，A，B 是 C 上异于点 O 的两点，O 为坐标原点，则(　　)

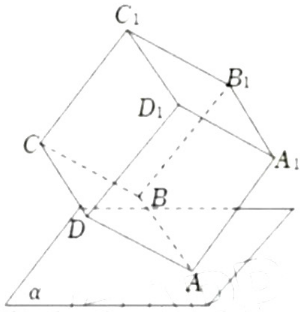
A. l 的方程为 $x=-\frac{1}{2}$

B. 若 $|AF|=\frac{3}{2}$，则 $\triangle AOF$ 的面积为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

C. 若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$，则 $|OA|\cdot|OB|\ge 9$

D. 若 $\angle AFB=120°$，过 AB 的中点 D 作 $DE\perp l$ 于点 E，则 $\frac{|AB|}{|DE|}$ 的最小值为 $\sqrt{3}$

11.如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，顶点A在平面α内，其余顶点在α的同侧，顶点B，C，A_1到α的距离分别为1，2，3，则(　　)



A. $BD//$平面α

B.平面$A_1AC\perp$平面α

C.直线AB_1与α所成角比直线AA_1与α所成角大

D.正方体的棱长为$\sqrt{11}$

12.已知a，b为正实数，且$ab+2a+b=6$，则(　　)

A. ab的最大值为2　　　　B. $2a+b$的最小值为5

C. $\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{2}{b+1}$的最小值为$\dfrac{9}{8}$　　　　D. $|a-b|\in(0,3)$

三、填空题(本题共4小题，每小题5分，共20分.)

13.设直线$x+y+1=0$是曲线$y=a-\ln x$的一条切线，则$a=$________.

14.楼道里有8盏灯，为了节约用电，需关掉3盏互不相邻的灯，则关灯方案有________种.

15.过双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右焦点$F$作直线$l$，且直线$l$与双曲线$C$的一条渐近线垂直，垂足为$A$，直线$l$与另一条渐近线交于点$B$.且点$A$，$B$位于$x$轴的异侧，$O$为坐标原点，若$\triangle OAB$的内切圆的半径为$\dfrac{2b}{3}$，则双曲线$C$的离心率为________.

16.小说《三体》中，一个“水滴”摧毁了人类整个太空舰队，当全世界第一次看到“水滴”的影像时，所有人都陶醉于它那绝美的外形.这东西真的是太美了，像梦之海中跃出的一只镜面海豚，仿佛每时每刻都在宇宙之夜中没有尽头地滴落着.有科幻爱好者为“水滴”的轴截面设计了二维数学图形，已知集合$P=\left\{(x,y)\middle|(x-\cos\theta)^2+(y+\sin\theta)^2=4,0\le\theta\le\pi\right\}$.由集合$P$中所有的点组成的图形如图中阴影部分所示，中间白色部分就如美丽的“水滴”.则图中“水滴”外部阴影部分的面积为________.

四、解答题(本题共6小题，共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.(本小题满分10分)

记S_n为正项数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$1+a_n$是4与S_n的等比中项.

(1)求$\{a_n\}$的通项分式；

(2)证明：$\dfrac{1}{a_1^2}\times\dfrac{1}{a_2^2}+\dfrac{1}{a_3^2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n^2}<\dfrac{5}{4}$.

18.(本小题满分 12 分)

已知 a，b，c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A，B，C 的对边，且 $a\cos C+\sqrt{3}a\sin C=b+c$.

(1)求 A；

(2)已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$，设 M 为 BC 的中点，且 $AM=\sqrt{3}$，$\angle BAC$ 的平分线交 BC 于 N，求线段 AN 的长度.

19.(本小题满分 12 分)

近日，某芯片研发团队表示已自主研发成功多维先进封装技术XDFOI，可以实现4nm手机SOC芯片的封装，这是中国芯片技术的又一个重大突破，对中国芯片的发展具有极为重要的意义.可以说国产4nm先进封装技术的突破，激发了中国芯片的潜力，证明了知名院士倪光南所说的先进技术是买不来的、求不来的，自主研发才是最终的出路.研发团队准备在国内某著名大学招募人才，准备了3道测试题，答对两道就可以被录用，甲、乙两人报名参加测试，他们通过每道试题的概率均为 $p(0<p<1)$，且相互独立，若甲选择了全部3道试题，乙随机选择了其中2道试题，试回答下列问题.(所选的题全部答完后再判断是否被录用)

(1)求甲和乙各自被录用的概率；

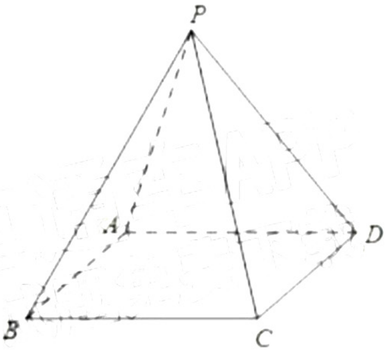
(2)设甲和乙中被录用的人数为 ξ，请判断是否存在唯一的 p 值 p_0，使得 $E(\xi)=1.5$？并说明理由.

20.(本小题满分 12 分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是边长为2的正方形，$PA=PB=2$.

(1)证明：$\angle PAD=\angle PBC$；

(2)当直线 PA 与平面 PCD 所成角的正弦值最大时，求此时二面角 $P-AB-C$ 的大小.



21.(本小题满分 12 分)

已知 $F\left(-1,0\right)$，B 是圆 $C:\left(x-1\right)^2+y^2=16$ 上的任意一点，线段 BF 的垂直平分线交 BC 于点 P.

(1)求动点 P 的轨迹 Γ 的方程；

(2)过点 $M\left(t,0\right)$ 的直线 l 与曲线 Γ 相交于 A，B 两点，点 B 关于 x 轴的对称点为 B'，直线 AB' 交 x 轴于点 N，证明：$\vec{OM}\cdot\vec{ON}$ 为定值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{ax-1}}{x}+\ln x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1)当 $a=1$ 时，求函数 $f\left(x\right)-x$ 的最小值；

(2)若函数 $\dfrac{f\left(x\right)}{x}$ 的最小值为 a，求 a 的最大值.