

2023 年 1 月山西省高三适应性调研考试

数学试题 A 卷答案

1. D $A=\{1,2,3,4\}, B=\{x|x>3\}, A\cap \complement_{\mathbb{R}}B=\{1,2,3\}$.
2. C $|z(1+\sqrt{3}i)|=|z||1+\sqrt{3}i|=2$, 于是 $|z|=1$.
3. C $m_2+1.45=-2.5\lg \frac{1}{4}, m_2=5\lg 2-1.45\approx 0.05$.
4. A 易得圆方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$, 直线过定点 $(4,2)$ 且斜率为 k , 定点在圆上, 又过点 $(4,2)$ 与圆相切的直线没有斜率, 故直线和圆必相交.
5. D $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.
6. B 由表中数据可知 $\xi_i\sim B(2, p_i)$, $\therefore E(\xi_i)=2p_i, D(\xi_i)=2p_i(1-p_i)$, 又 $\because p_1<p_2$,
 $\therefore E(\xi_1)<E(\xi_2), D(\xi_1)-D(\xi_2)=2(p_1-p_2)(1-p_1-p_2)>0, D(3\xi_1+1)>D(3\xi_2+1)$.
7. B 设第一次价格为 p_1 , 第二次价格为 p_2 , 方案一: 若每次购买数量 n , 则两次购买的平均价格为 $x_1=\frac{p_1n+p_2n}{2n}=\frac{p_1+p_2}{2}$, 方案二: 若每次购买钱数为 m , 则两次购买的平均价格为 $x_2=\frac{2m}{\frac{m}{p_1}+\frac{m}{p_2}}=\frac{2}{\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}}$, 作差可得 $x_1\geq x_2$, 当且仅当 $p_1=p_2$ 时, “=” 号成立, 所以方案二更经济.
8. D 可知 $\frac{T}{2}<\frac{\pi}{3}<T$, 于是 $3<\omega<6$, 于是 $\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\leq -\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}<0, \\ \pi<\frac{\pi\omega}{6}+\frac{\pi}{3}\leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases}$
 $\therefore 4<\omega\leq 5, \therefore \omega=5$, 进一步验证 D 正确.
9. BC 去掉 B 点后, 回归效果更好, 则 R^2 越趋于 1, $|r|$ 越趋于 1, 残差平方和变小, 相关性增强.
10. ABC $a>0, b>0, a+b\geq 2\sqrt{ab}, \therefore ab\leq \frac{1}{4}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取最大值; $\frac{a^2+b^2}{2}\geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,
 $\therefore a^2+b^2\geq \frac{1}{2}$, 当且仅当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时取最小值;
 $\frac{4}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{4}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b)=5+\frac{4b}{a}+\frac{a}{b}\geq 5+2\sqrt{4}=9$, 当且仅当 $a=2b=\frac{2}{3}$ 时取最小值;
 $\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2\leq \frac{a+b}{2}=\frac{1}{2}, \sqrt{a}+\sqrt{b}\leq \sqrt{2}$.
11. ACD 计算得 A 正确; 项以奇数、奇数、偶数的规律循环出现, 故 $a_{2\ 023}$ 为奇数, B 错误; C 中, $\because a_{n-1}+a_n=a_{n+1}$,
 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2\ 023}=a_1+(a_4-a_2)+(a_6-a_4)+\cdots+(a_{2\ 024}-a_{2\ 022})=a_1+a_{2\ 024}-a_2=a_{2\ 024}$, 故 C 正确; D
中, $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2\ 024}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2\ 022}+a_{2\ 023})=S_{2\ 023}$, 故 D 正确.
12. ABD 直线 BP 与直线 AD 所成角即为 $\angle PBC$, 在 $\text{Rt}\triangle BCP$ 中, $\tan 30^\circ=\frac{CP}{BC}, \therefore CP=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 P 在以 C 为圆心, $\frac{\sqrt{3}}{3}$
为半径的圆落在侧面 CC_1D_1D 内的圆弧上, A 正确;
过 P 作 $PP_1\perp DC$ 于点 P_1 (图略), 设 $P_1C=a, P_1P=b$, 直线 BP 与平面 ABCD 所成角即为 $\angle PBP_1$,
在 $\text{Rt}\triangle PBP_1$ 中, $\tan \angle PBP_1=\frac{PP_1}{BP_1}=\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 从而 $3b^2-a^2=1$, 故点 P 的轨迹为双曲线的一部分, 故 B
正确;
在 $\text{Rt}\triangle D_1DQ$ 中, $|D_1Q|=\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{DD_1^2+DQ^2}$, 从而 $|DQ|=\frac{1}{2}$, 故 Q 在以 D 为圆心, $\frac{1}{2}$ 为半径的圆落在底面 AB-
CD 内的圆弧上, C 错误;

Q 到直线 DD_1 的距离等于 Q 到平面 ABB_1A_1 的距离, 即 Q 到点 D 的距离等于 Q 到直线 AB 的距离, 故点 Q 的轨迹为抛物线的一部分, 故 D 正确.

13. 解析: $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$

答案: $\frac{1}{\cos^2 x}$

14. 解析: 易得 $a=2$, 设二项展开式的第 $k+1$ 项 $T_{k+1} = C_6^k (2x^2)^{6-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = C_6^k 2^{6-k} x^{12-3k},$

当 $k=4$ 时, 常数项为 60.

答案: 60

15. $f(x) = -\cos \pi x$ (答案不唯一, 满足条件即可)

16. 解析: 过 P 作准线的垂线, 垂足为 Q, 过 A 作准线的垂线, 垂足为 B (图略), 于是 $\triangle PAF$ 周长 $= PF + PA + AF = PQ + PA + AF \geq AB + AF = 5 + \sqrt{10}$, 周长最小时 P 为 AB 与抛物线的交点.

答案: $5 + \sqrt{10}$

17. 解: (1) 选①. 由 $b(1 + \cos C) = \sqrt{3}c \cdot \sin B$ 及正弦定理得

$\sin B(1 + \cos C) = \sqrt{3} \sin C \sin B. \dots\dots\dots 2$ 分

又 $B \in (0, \pi), \therefore \sin B \neq 0$, 于是 $1 + \cos C = \sqrt{3} \sin C, 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin C - \frac{1}{2} \cos C\right) = 1,$

即 $\sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, 又 $C \in (0, \pi),$

$\therefore C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$, 故 $C = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 5$ 分

选②. 由 $\left(\sin A - \frac{1}{2} \sin B\right)^2 = \sin^2 C - \frac{3}{4} \sin^2 B$ 及正弦定理得 $\left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 = c^2 - \frac{3}{4}b^2, \dots\dots\dots 2$ 分

化简得 $a^2 + b^2 - c^2 = ab$, 于是 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{ab}{2ab} = \frac{1}{2}$, 又 $C \in (0, \pi)$, 故 $C = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 5$ 分

选③. 由 $3b \cos C + c \cos B = a + b$ 及正弦定理得

$3 \sin B \cos C + \sin C \cos B = \sin A + \sin B = \sin B + \sin(C + B) = \sin B + \sin C \cos B + \cos C \sin B$, 又 $B \in (0, \pi),$

$\therefore \sin B \neq 0, \dots\dots\dots 2$ 分

于是 $3 \cos C = 1 + \cos C, \cos C = \frac{1}{2}$, 又 $C \in (0, \pi)$, 故 $C = \frac{\pi}{3}. \dots\dots\dots 5$ 分

(2) $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BA} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{CB}, \dots\dots\dots 7$ 分

两边平方有: $\overrightarrow{CP}^2 = \frac{1}{9} \overrightarrow{CB}^2 + \frac{4}{9} \overrightarrow{CA}^2 + \frac{4}{9} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB},$

所以 $\overrightarrow{CP}^2 = \frac{1}{9} \times 4 + \frac{4}{9} \times 9 + \frac{4}{9} \times 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = \frac{52}{9}, |PC| = \frac{2\sqrt{13}}{3}. \dots\dots\dots 10$ 分

18. (1) 解: 由题意得 $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, \dots\dots\dots 2$ 分

从而 $d = 2, \therefore a_n = 2n, \dots\dots\dots 4$ 分

于是 $S_n = \frac{n(2+2n)}{2} = n^2 + n. \dots\dots\dots 6$ 分

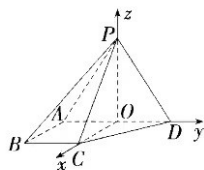
(2) 证明: $b_n = \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{4n^2} < \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \dots\dots\dots 9$ 分

$T_n = \frac{1}{4 \times 1^2} + \frac{1}{4 \times 2^2} + \dots + \frac{1}{4 \times n^2} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$

$= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) < \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 12$ 分



19. 解: (1) 取 AD 的中点 O , 连接 PO, OC , $\because \triangle PAD$ 为等边三角形, $\therefore PO \perp AD$. 又 $\because$ 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD$, $\therefore PO \perp$ 平面 $ABCD$ 2 分



以 O 为坐标原点, 直线 OC, OD, OP 分别为 x, y, z 轴建立如图所示空间直角坐标系, 于是 $A(0, -1, 0), D(0, 1, 0), C(1, 0, 0), B(1, -1, 0), P(0, 0, \sqrt{3})$,

$\overrightarrow{CP} = (-1, 0, \sqrt{3}), \overrightarrow{CD} = (-1, 1, 0)$, 设平面 PCD 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$\therefore \mathbf{n} \perp \overrightarrow{CP}, \mathbf{n} \perp \overrightarrow{CD}$, 于是 $\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CP} = -x + \sqrt{3}z = 0, \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CD} = -x + y = 0, \end{cases}$ 取 $z = 1$, 则 $\mathbf{n} = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1)$, 4 分

又 $\overrightarrow{BC} = (0, 1, 0)$,

故 B 到平面 PCD 的距离 $d = \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \mathbf{n}|}{|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ 6 分

(2) 设 $E(s, t, r), \overrightarrow{PE} = \lambda \overrightarrow{PD}, \therefore (s, t, r - \sqrt{3}) = \lambda(0, 1, -\sqrt{3}), \therefore E(0, \lambda, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$,

$\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0), \overrightarrow{AE} = (0, \lambda + 1, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)$, 设平面 EAC 的法向量为 $\mathbf{m} = (x', y', z')$,

$\therefore \mathbf{m} \perp \overrightarrow{AC}, \mathbf{m} \perp \overrightarrow{AE}$, 于是 $\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AC} = x' + y' = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{AE} = (\lambda + 1)y' + (\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda)z' = 0, \end{cases}$ 取 $y' = \sqrt{3}(\lambda - 1)$, 则 $\mathbf{m} = (\sqrt{3}(1 - \lambda), \sqrt{3}(\lambda - 1), \lambda + 1)$, 9 分

又平面 DAC 的法向量为 $\overrightarrow{OP} = (0, 0, \sqrt{3})$,

于是 $\cos \langle \overrightarrow{OP}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \mathbf{m}}{|\overrightarrow{OP}| |\mathbf{m}|} = \frac{\sqrt{3}(\lambda + 1)}{\sqrt{3} \sqrt{3(1 - \lambda)^2 + 3(\lambda - 1)^2 + (\lambda + 1)^2}} = \frac{\lambda + 1}{\sqrt{7\lambda^2 - 10\lambda + 7}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$,

化简得 $3\lambda^2 - 10\lambda + 3 = 0$, 又 $\lambda \in [0, 1]$, 得 $\lambda = \frac{1}{3}$, 即 $\frac{PE}{PD} = \frac{1}{3}$ 12 分

20. 解: (1) 记事件 A_i 表示第 i 次从第一个盒子里取出红球, 记事件 B 表示两次取球中有红球, 则 $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ 4 分

$P(A_2 | B) = \frac{P(A_2 B)}{P(B)} = \frac{P(A_1 A_2) + P(\overline{A}_1 A_2)}{P(B)} = \frac{\frac{2 \times 1}{5 \times 4} + \frac{3 \times 2}{5 \times 4}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$ 6 分

(2) 记事件 C_1 表示从第一个盒子里取出红球, 记事件 C_2 表示从第一个盒子里取出白球, 记事件 D 表示从第二个盒子里取出红球,

则 $P(D) = P(C_1)P(D | C_1) + P(C_2)P(D | C_2) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} + \frac{3}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{22}{35}$ 12 分

21. (1) 解: 由题意得 $\begin{cases} \frac{4^2}{a^2} - \frac{3^2}{b^2} = 1, \\ b = \sqrt{3}, \end{cases}$ 得 $a = 2$, 3 分

从而双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 4 分

(2) 证明: 设直线 BN 的斜率为 k , 则直线 AM 的斜率为 $-2k$,

联立直线 BN 与双曲线方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = k(x - 2), \end{cases}$ 得 $(3 - 4k^2)x^2 + 16k^2x - 16k^2 - 12 = 0$,

于是 $2x_N = \frac{16k^2+12}{4k^2-3}$, 从而 $x_N = \frac{8k^2+6}{4k^2-3}$, 从而 $y_N = \frac{12k}{4k^2-3}$, 6 分

联立直线 AM 与双曲线方程 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1, \\ y = -2k(x+2), \end{cases}$ 得 $(3-16k^2)x^2 - 64k^2x - 64k^2 - 12 = 0$,

于是 $-2x_M = \frac{64k^2+12}{16k^2-3}$, 从而 $x_M = \frac{-32k^2-6}{16k^2-3}$, 从而 $y_M = \frac{24k}{16k^2-3}$, 8 分

于是 $k_{MN} = \frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{\frac{24k}{16k^2-3} - \frac{12k}{4k^2-3}}{\frac{-32k^2-6}{16k^2-3} - \frac{8k^2+6}{4k^2-3}} = \frac{24k^3+9k}{64k^4-9} = \frac{3k}{8k^2-3}$,

从而 $MN: y - \frac{12k}{4k^2-3} = \frac{3k}{8k^2-3} \left(x - \frac{8k^2+6}{4k^2-3} \right)$, 10 分

化简得 $y = \frac{3k}{8k^2-3}(x+6)$, 从而 l 过定点 $(-6, 0)$ 12 分

22. 解: (1) $f'(x) = 2x - \frac{2m}{x}$ 1 分

① 当 $m \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$, $\therefore f(x)$ 单调递增, 又 $f(1) = 0$, 故当 $0 < x < 1$ 时, $f(x) < 0$, 不满足题意, 舍去; 2 分

② 当 $m > 0$ 时, $f'(x) = \frac{2x^2-2m}{x} > 0, x > \sqrt{m}$, $\therefore f(x)$ 在 $(0, \sqrt{m})$ 上单调递减, 在 $(\sqrt{m}, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(\sqrt{m}) = m - m \ln m - 1$ 4 分

令 $g(m) = m - m \ln m - 1, g'(m) = -\ln m$, 令 $g'(m) > 0$, 得 $0 < m < 1$, 故 $g(m)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore g(m) \leq g(1) = 0$, 故 $m = 1$ 6 分

(2) 由 (1) 知: 当 $m = 1$ 时, $x^2 - 2 \ln x \geq 1$ 恒成立,

$ae^{x^2-1} - 1 \geq 2 \ln x - \ln a$ 等价于 $e^{x^2-1+\ln a} \geq 2 \ln x - \ln a + 1$,

又等价于 $e^{x^2-1+\ln a} + x^2 - 1 + \ln a \geq x^2 + 2 \ln x = x^2 + \ln x^2 = e^{\ln x^2} + \ln x^2$ 8 分

令 $h(t) = e^t + t$, 显然 $h(t)$ 单调递增, 上式即为 $h(x^2-1+\ln a) \geq h(\ln x^2)$ 10 分

从而 $x^2-1+\ln a \geq \ln x^2$, 即 $-\ln a \leq x^2-1-2 \ln x$, 只需 $-\ln a \leq (x^2-1-2 \ln x)_{\min} = 0$,

$\therefore \ln a \geq 0, \therefore a \geq 1$.

故实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线