2023 届高三年级 5 月适应性考试

数学试题参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	B	C	A	C	B	C	D	AD	BCD	ABD	ABD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

13. $\sqrt{2}$　　14. (1, 4, 2) 或 (4, 1, 2)（写一个即可）　　15. $\left[\frac{\ln 2+1}{4},1\right)$　　16. $\sqrt{6}-\sqrt{3}$

选择题与填空题详解：

1. 【答案】D

【解析】$z=\frac{2}{1+i}=1-i$，$\therefore |\bar{z}+i|=|1+2i|=\sqrt{5}$，故正确答案为 D

2. 【答案】B

【解析】$A=\{x|\log_2 x<1\}=\{x|0<x<2\}$，$C_R B=\{x|-1<x<1\}$，$\therefore A\cup C_R B=\{x|-1<x<2\}$，故正确答案为 B

3. 【答案】C

【解析】由残差图可知，残差的方差不是一个常数，随解释变量 x 的变大而变大，所以模型误差不满足一元线性回归模型的 $D(e)=\sigma^2$ 的假设，故正确答案为 C

4. 【答案】A

【解析】设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，则 $a_m a_n=(a_1\cdot q^{m-1})\cdot(a_1\cdot q^{n-1})=a_1^2\cdot q^{m+n-2}$，$a_r a_s=(a_1\cdot q^{r-1})\cdot(a_1\cdot q^{s-1})=a_1^2\cdot q^{r+s-2}$

若 $m+n=r+s$，则 $a_m a_n=a_r a_s$，$\therefore$ “$m+n=r+s$” 是 “$a_m a_n=a_r a_s$” 的充分条件；

若 $a_m a_n=a_r a_s$，则 $a_1^2\cdot q^{m+n-2}=a_1^2\cdot q^{r+s-2}$，若 $q=1$，则 m,n,r,s 可以取任意正整数，若 $q\neq 1$，则 $m+n=r+s$；

$\therefore$ “$m+n=r+s$” 不是 “$a_m a_n=a_r a_s$” 的必要条件，故正确答案为 A

5. 【答案】C

【解析】$\because (\frac{\sin\theta}{x}-x+1)^6$ 的展开式中 x^4 的系数为 $C_6^4-C_6^5\cdot\sin\theta=12$，$\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$，

$\therefore \cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$，故正确答案为 C

6. 【答案】B

【解析】设 $f(x)=\sin x-x(0<x<1)$，则 $f'(x)=\cos x-1<0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

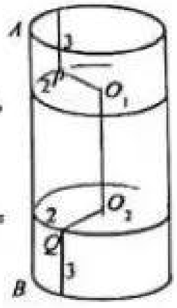
$\therefore f(x)<f(0)=0$，即 $\sin x<x$，又 $\because 0<x<1$，$\therefore 0<\frac{\sin x}{x}<1$，$\therefore (\frac{\sin x}{x})^2<\frac{\sin x}{x}$；

设 $g(x)=\frac{\sin x}{x}(0<x<1)$，则 $g'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$，令 $r(x)=x\cos x-\sin x$ 则 $r'(x)=-x\sin x<0$，

$\therefore r(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，$\therefore r(x)<r(0)=0$，$\therefore g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减，

$\because 0<x^2<x<1$，$\therefore g(x^2)>g(x)$，即$\frac{\sin x^2}{x^2}>\frac{\sin x}{x}$.综上，$(\frac{\sin x}{x})^2<\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin x^2}{x^2}$，故正确答案为 B.

7. 【答案】C



【解析】如图，设过点 P 且平行底面的截面圆心为 O_1，过点 Q 且平行底面的截面圆心为 O_2，设圆柱底面半径为 r，则 $2\pi r=12$，$\therefore r=\frac{6}{\pi}$，$<\overrightarrow{O_1P},\overrightarrow{O_2Q}>=\frac{2+2}{\frac{6}{\pi}}=\frac{2}{3}\pi$，

$\because \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2Q}$，$\therefore$ $|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{PO_1}+\overrightarrow{O_1O_2}+\overrightarrow{O_2Q}|^2=2r^2+|\overrightarrow{O_1O_2}|^2+2\overrightarrow{PO_1}\cdot\overrightarrow{O_2Q}=$

$=2\cdot(\frac{6}{\pi})^2+6^2+2\cdot(\frac{6}{\pi})^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{36}{\pi^2}+36$，$\therefore |PQ|=\frac{6\sqrt{3+\pi^2}}{\pi}$，故正确答案为 C

8. 【答案】D

【解析】设 $M(x,y)$，$\because |MA|=2|MO|$，$\therefore |MA|^2=4|MO|^2$，$\therefore (x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2)$，可得动点 M 的轨迹为圆 C：$(x+1)^2+y^2=4$，$\because \angle PMQ\ge\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ 圆 C 内含于或内切于以 PQ 为直径的圆，设 PQ 的中点为 N，则 $|CN|\le\frac{|PQ|}{2}-2$，$\therefore |PQ|\ge 2|CN|+4\ge 2\cdot\frac{|-1-3|}{\sqrt{2}}+4=4\sqrt{2}+4$，$\therefore$ 线段 PQ 长度的最小值为 $4\sqrt{2}+4$。

故正确选项为 D.

9. 【答案】AD

【解析】$\because X$ 小于 70 的概率为 $P(X<70)=P(X>110)=0.2$，

$\therefore P(90\le X\le 110)=P(X\ge 90)-P(X\ge 110)=0.5-0.2=0.3$，故选项 A 正确;

由题意可知 $Y\sim B(10,0.3)$，$\therefore P(Y=1)=C_{10}^1\times 0.3\times 0.7^9=3\times 0.7^9$，故选项 B 错误;

$\because Y\sim B(10,0.3)$，$\therefore E(Y)=10\times 0.3=3, D(Y)=10\times 0.3\times(1-0.3)=2.1$，故选项 C 错误，选项 D 正确.

综上，正确选项为 AD.

10. 【答案】BCD

【解析】已知椭圆的实半轴长 $a=2$，虚半轴长 $b=\sqrt{3}$，半焦距长 $c=1$

ΔPF_1F_2 的面积 $S=\frac{1}{2}(2a+2c)\cdot n=\frac{1}{2}\cdot 2c\cdot y_0$，所以 $(a+c)\cdot n=c\cdot y_0$，所以 $3n=y_0$，故选项 A 错误;

设 ΔPF_1F_2 的内切圆 Q 与 PF_1,PF_2,F_1F_2 的分别切于点 A,B,D，则

$|PF_1|-|PF_2|=|AF_1|-|BF_2|=|DF_1|-|DF_2|=(c+m)-(c-m)=2m$，故选项 B 正确;

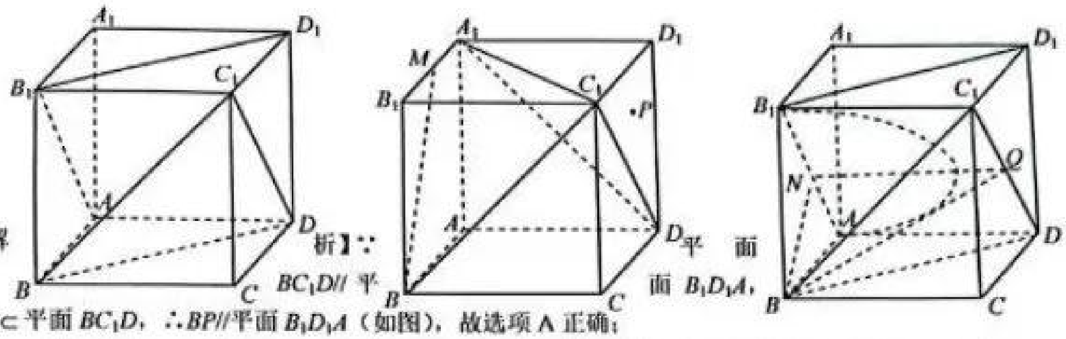
$\because |PF_1|+|PF_2|=2a$，联立 $|PF_1|-|PF_2|=2m$，可得 $|PF_1|=a+m=2+m$，

又 $\because |PF_1|=\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}=\sqrt{(x_0+1)^2+3(1-\frac{x_0^2}{4})}=2+\frac{x_0}{2}$，$\therefore 2+m=2+\frac{x_0}{2}$，$\therefore x_0=2m$，故选项 C 正确;

设 $x_0=2\cos\theta, y_0=\sqrt{3}\sin\theta(0<\theta<\frac{\pi}{2})$，则 $m+n=\frac{1}{2}x_0+\frac{1}{3}y_0=\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$

∴当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时 $m+n$ 取得最大值 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，故选项 D 正确．综上，正确选项为 BCD.

11. 【答案】ABD



【解析】∵平面 BC_1D// 平面 B_1D_1A，又 $BP\subset$ 平面 BC_1D，∴BP// 平面 B_1D_1A（如图），故选项 A 正确；

∵ $BD_1\perp$ 平面 A_1C_1D，又∵ $BD_1\subset$ 平面 PBD_1，∴平面 $PBD_1\perp$ 平面 A_1C_1D（如图），故选项 B 正确；

∵ $\angle MBD_1$ 为定值，∴满足 $\angle MBP=\angle MBD_1$ 的点 P 在以 B 为顶点，BM 为轴的圆锥的侧面上，又 P 在平面 CDD_1C_1 上，且 BM// 平面 CDD_1C_1，∴P 点的运动轨迹是双曲线，故选项 C 错误；

∵设 AB_1，DC_1 中点分别为 N，Q，则点 A 的运动轨迹是平面 AB_1C_1D 内以 N 为圆心，$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为半径的圆（如图），∵ $DC_1\perp NQ, DC_1\perp BQ$，∴ $DC_1\perp$ 平面BNQ，∴平面$BDC_1\perp$ 平面BNQ，设 NQ 与圆的交点分别为 E、F（点 E 位于点 F，Q 之间），易知当点 A 分别位于点 E，F 时，点 A 到平面 BDC_1 的距离分别取到最小值和最大值，且距离的最小值 $d_{min}=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\sin\angle NQB=(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$，距离的最大值 $d_{max}=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\sin\angle NQB=(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$，∵ $\triangle BDC_1$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$V_{min}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1-\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{12}$，$V_{max}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(1+\frac{\sqrt{2}}{2})\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{2}}{12}$

故选项 D 正确．综上，正确选项为 ABD.

12. 【答案】ABD

【解析】∵ $f'(x)=-xe^x$，∴函数 $f(x)$ 的图像在点 $(-a_n, f(-a_n))$ 处的切线为 $y=a_ne^{-a_n}(x+a_n)+(1+a_n)e^{-a_n}-1$，

令 $y=0$，解得 $x=-a_n-1+\frac{e^{a_n}-1}{a_n}$，∴ $e^{a_{n+1}}=\frac{e^{a_n}-1}{a_n}$，∴ $a_ne^{a_{n+1}}=e^{a_n}-1$，故选项 A 正确；

∵ $a_ne^{a_{n+1}}=e^{a_n}-1\ge(a_n+1)-1=a_n$，∴ $a_n(e^{a_{n+1}}-1)\ge0$，∵ $a_1>0$，∴ $a_n>0$．

下证数列 $\{a_n\}$ 单调递减，即证 $e^{a_{n+1}}<e^{a_n}$，即证 $\frac{e^{a_n}-1}{a_n}<e^{a_n}$，即证 $e^{a_n}-1<a_ne^{a_n}$，即证 $(1-a_n)e^{a_n}-1<0$，

即证 $f(a_n)<0$．∵ $f'(x)=-xe^x$，当 $x>0$ 时 $f'(x)<0$，∴ $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

∵ $a_n>0$，∴ $f(a_n)<0$，∴ $a_{n+1}<a_n$，∴数列 $\{a_n\}$ 单调递减，∴ $a_n\le a_1=1$，且 $a_{2022}>a_{2023}$，故选项 B 正确，选项 C 错误；

∵ $1-\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}$，要证 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n>1-\frac{1}{2^n}$，下证 $a_n>\frac{1}{2^n}$，只需证 $a_{n+1}>\frac{1}{2}a_n$，

即证 $a_ne^{a_{n+1}}>a_ne^{\frac{a_n}{2}}$，即证 $e^{a_n}-1>a_ne^{\frac{a_n}{2}}$，即证 $e^{\frac{a_n}{2}}-e^{-\frac{a_n}{2}}>a_n=2\ln e^{\frac{a_n}{2}}$，令 $x=e^{\frac{a_n}{2}}$，∵ $0<a_n\le1$，

$\therefore 1 < x \le \sqrt{e}$，则即证 $\ln x < \frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})(1 < x \le \sqrt{e})$，令 $g(x) = \ln x - \frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})(1 < x \le \sqrt{e})$，

则 $g'(x) = \frac{-x^2+2x-1}{2x^2} < 0$，$\therefore g(x)$ 在区间 $(1,e]$ 上单调递减，$\therefore g(x) < g(1) = 0$，故选项 D 正确。

综上，正确选项为 ABD

13. 【答案】$\sqrt{2}$

【解析】$\because \overrightarrow{FH}\cdot\overrightarrow{FO} = |\overrightarrow{FH}|\cdot|\overrightarrow{FO}|\cos<\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FO}> = b\cdot c\cos<\overrightarrow{FH},\overrightarrow{FO}> = b^2 = a^2$，$\therefore c^2 = 2a^2$，$\therefore$离心率 $e = \sqrt{2}$

14. 【答案】(1, 4, 2) 或 (4, 1, 2)（写一个即可）

【解析】当 $m \ge 5$ 时，$m!$ 的尾数为 0，而 5^p 尾数为 5，$\therefore m,n \le 4$，一一检验可得 $(m,n,p) = (1,4,2)$ 或 $(4,1,2)$。

15. 【答案】$\left[\frac{\ln 2+1}{4},1\right)$

【解析】（解法一）$f(x) = \frac{\ln|x|+1}{x} - mx = 0 \Leftrightarrow \ln|x|+1-mx^2 = 0$，令 $h(x) = \ln|x|+1-mx^2$，则 $h(-x) = h(x)$，

$\therefore h(x)$ 为偶函数，$\therefore$只需考虑 $x>0$ 时 $h(x) = \ln x+1-mx^2$ 有两个零点 c,d，且在区间 (c,d) 存在唯一的整数．$x>0$ 时 $h(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln x+1}{x^2} = m$，令 $g(x) = \frac{\ln x+1}{x^2}$，则 $g'(x) = -\frac{2\ln x+1}{x^3}$，当 $x\in(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 时，$g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 单调递增，当 $x\in(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 单调递减，$\because$ 在区间 (c,d) 存在唯一的整数，

$\therefore g(2) \le m < g(1)$，即 $\frac{\ln 2+1}{4} \le m < 1$，$\therefore m$ 的取值范围为 $\left[\frac{\ln 2+1}{4},1\right)$．

（解法二）$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{\ln|x|+1}{x} = mx$，令 $g(x) = \frac{\ln|x|+1}{x}$，则 $g(-x) = -g(x)$，$\therefore g(x)$ 为奇函数，

$\because h(x) = mx$ 也是奇函数，$\therefore$只需考虑 $x>0$ 时 $g(x) = \frac{\ln x+1}{x}$ 与 $h(x)=mx$ 有两个交点 $(c,g(c)),(d,g(d))$

且在区间 (c,d) 存在唯一的整数．$g'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)>0$，$\therefore g(x)$ 单调递增，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$\therefore g(x)$ 单调递减，当直线 $h(x)=mx$ 过点 $(1,1)$ 时 $m=1$，当直线 $h(x)=mx$ 过点 $(2,\frac{\ln 2+1}{2})$ 时 $m=\frac{\ln 2+1}{4}$，$\because g(x)$ 与 $h(x)$ 有两个交点，且在区间 (c,d) 存在唯一的整数，$\therefore$ $\frac{\ln 2+1}{4} \le m < 1$，$\therefore m$ 的取值范围为 $\left[\frac{\ln 2+1}{4},1\right)$．

16. 【答案】$\sqrt{6}-\sqrt{3}$

【解析】解法一：记圆心为 O，由 $AC = OA = OC = \frac{1}{2}AB$ 知，$\triangle OAC$ 为等边三角形，记 $CE=a$，$CD=b$，$DE=c$，圆半径为 r，则 $S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}ab$，又 $S_{\triangle ECD} = \frac{1}{2}c\cdot r\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}cr$，$\therefore \frac{\sqrt{2}}{4}ab = \frac{\sqrt{3}}{4}cr$，$\therefore c = \frac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{3}r}$①，

$\triangle CDE$ 中由余弦定理，$c^2 = a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{4}$，即 $c^2 = a^2+b^2-\sqrt{2}ab$②，由①②，$\frac{2a^2b^2}{3r^2} = a^2+b^2-\sqrt{2}ab$，

又 $a^2+b^2 \ge 2ab$，$\therefore \frac{2a^2b^2}{3r^2} \ge (2-\sqrt{2})ab$，$\therefore ab \ge \frac{(2-\sqrt{2})\cdot 3r^2}{2}$，

又四边形 CEC_1D 的面积 $S=2S_{\Delta ECD}=2\times\frac{1}{2}ab\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}ab$，$\therefore S_{\min}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{(2-\sqrt{2})\cdot 3r^2}{2}=\frac{(3\sqrt{2}-3)r^2}{2}$，

取"="时当且仅当 $a=b$ 且 $c^2=a^2+b^2-\sqrt{2}ab$ 且 $c^2=\frac{2a^2b^2}{3r^2}$，

即 $a^2=b^2=\frac{(2-\sqrt{2})\cdot 3r^2}{2}$ 时取"="，此时 $\frac{DE}{AC}=\frac{c}{r}=\frac{\sqrt{2}a^2}{\sqrt{3}r^2}=\frac{\sqrt{2}\cdot\frac{2-\sqrt{2}}{2}\cdot 3r^2}{\sqrt{3}r^2}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$.

解法二：设圆的半径为 r，$\angle CDA=\theta$，$\because AC=\frac{1}{2}AB=r$，$\therefore \angle CAD=\frac{\pi}{3}$，

在 ΔCDA 中由正弦定理可得 $\frac{r}{\sin\theta}=\frac{CD}{\sin\frac{\pi}{3}}$，$\therefore CD=\frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\theta}$；

在 ΔCEA 中由正弦定理可得 $\frac{r}{\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}=\frac{CE}{\sin\frac{\pi}{3}}$，$\therefore CE=\frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}$，$\therefore \Delta CED$ 的面积

$$S_{\Delta CED}=\frac{1}{2}|CD|\cdot|CE|\cdot\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\theta}\cdot\frac{r\sin\frac{\pi}{3}}{\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}r^2}{16\sin\theta\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}=\frac{3r^2}{8(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta)}$$

$=\frac{3r^2}{4-4(\cos 2\theta+\sin 2\theta)}=\frac{3r^2}{4-4\sqrt{2}\sin(2\theta+\frac{\pi}{4})}$，当 $\theta=\frac{5}{8}\pi$ 时四边形 CEC_1D 的面积取得最小值

$\frac{3r^2}{2+2\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{2}-1)}{2}r^2$，此时 $CD=CE=\frac{\sqrt{3}r}{2\sin\frac{3}{8}\pi}$，

$$DE=2CE\cos\frac{3}{8}\pi=\frac{\sqrt{3}r\cdot\cos\frac{3}{8}\pi}{\sin\frac{3}{8}\pi}=\frac{\sqrt{3}r\cdot\cos\frac{3}{8}\pi\cdot 2\cos\frac{3}{8}\pi}{\sin\frac{3}{8}\pi\cdot 2\cos\frac{3}{8}\pi}=\frac{\sqrt{3}r(1+\cos\frac{3}{4}\pi)}{\sin\frac{3}{4}\pi}=(\sqrt{6}-\sqrt{3})r，\therefore \frac{DE}{AC}=\sqrt{6}-\sqrt{3}$$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 解：（1）$\because f(x)$ 的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}$，$\therefore |BC|_{\min}=\frac{\pi}{\omega}$，$\therefore \Delta ABC$ 面积的最小值 $S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\omega}=\pi$，$\therefore \omega=\frac{1}{2}$

……………………………………………………………………………………4 分

（2）由（1）知 $f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4})$，$\because x\in[0,m]$，$\therefore \frac{1}{2}x+\frac{\pi}{4}\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{m}{2}+\frac{\pi}{4}\right]$，$\because f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上

有 20 个极值点，$\therefore 20\pi-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}m+\frac{\pi}{4}\le 20\pi+\frac{\pi}{2}$，$\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $\left(\frac{77\pi}{2},\frac{81\pi}{2}\right]$ ……10 分

18. 解：（1）$\because a_1=1$，由 $(a_n+1)(a_{n+1}+1)=\lambda(S_n+n)$ 求得 $a_2=\lambda-1$，$a_3=\lambda+1$，

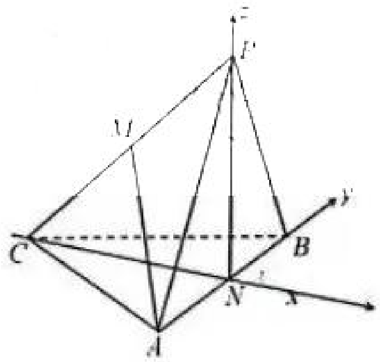
$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，$\therefore 2a_2=a_1+a_3$，$\therefore \lambda=4$，$\therefore a_2=3$，$\therefore$ 公差 $d=a_2-a_1=2$，

$\therefore a_n=2n-1$. ……………………………………………………………4 分

（2）由 $(a_n+1)(a_{n+1}+1)=\lambda(S_n+n)$ ①，得 $(a_{n+1}+1)(a_{n+2}+1)=\lambda(S_{n+1}+n+1)$ ②

$PA=PB=PC$，$\therefore \triangle PAN\cong\triangle PBN\cong\triangle PCN$，$\because PA=PB$，$N$ 为 BC 的中点，$\therefore PN\perp AB$，
$\therefore \angle PNA=\angle PNB=\angle PNC=90^\circ$，$\therefore PN\perp NC$，$\therefore PN\perp$ 平面 ABC．　……………………………4 分
（证法二）取 BC 的中点 D，连结 ND，PD（如图），$\because PB=PC$，$\therefore BC\perp PD$，$\because PA=PB$，$\therefore PN\perp AB$，
$\because BC\perp AC$，$DN\,/\!/\,AC$，$\therefore BC\perp ND$，$\therefore BC\perp$ 平面 PND，
$\therefore BC\perp PN$，又 $\because PN\perp AB$，$\therefore PN\perp$ 平面 ABC．　……………………………4 分
（证法三）在 $Rt\triangle ABC$ 中，设 $AC=BC=2a$，则 $AB=2\sqrt{2}a$，又 N 为斜边 AB 中点，$\therefore CN=\sqrt{2}a$，
又 $\because PA=PB=2a, AB=2\sqrt{2}a$，$\therefore \triangle PAB$ 为直角三角形，且 $PN=\sqrt{2}a$，$\because PC=2a$，$\therefore PC^2=CN^2+PN^2$，
$\therefore PN\perp CN$，又 $\because PN\perp AB$，$\therefore PN\perp$ 平面 ABC．　……………………………4 分
（2）$\because AC=PA$，$BC=PB$，$\therefore \triangle ABC\cong\triangle ABP$，$\therefore \triangle PAB$ 是等腰直角三角形，
$\because N$ 为 AB 中点，$\therefore NP=NA=NB=NC$，$\therefore N$ 为三棱锥 $P-ABC$ 外接球的球心，依题意，$NA=\sqrt{2}$，$\therefore AC=2$
连结 MN，$\because AB\perp PN$，$AB\perp CN$，$\therefore AB\perp$ 平面 PCN，$\therefore AB\perp MN$，
$\therefore \angle MNP$ 为二面角 $M-AB-P$ 的平面角，等于 45°，　……………………………6 分
（解法一）$\because \triangle PCN$ 为等腰直角三角形，$\therefore M$ 为 PC 的中点，$\because AP=BP=BC=BP$，
$\therefore PC\perp AM, PC\perp BM$，$\therefore PC\perp$ 平面 ABM，$\therefore$ 平面 $ABM\perp$ 平面 PBC，来源：高三答案公众号
$\therefore$ 点 A 在平面 PBC 上的射影在 BM 上，$\therefore \angle AMB$ 即为 AM 与平面 PBC 所成的角，
$\because AM=BM=\sqrt{3}$，$AB=2\sqrt{2}$，可求得 $\sin\angle AMB=\frac{2}{3}\sqrt{2}$．　……………………………12 分
（解法二）由（1）知 CN、AB、PN 两两垂直，分别以 CN、AB、PN 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,-\sqrt{2},0)$，$B(0,\sqrt{2},0)$，$C(-\sqrt{2},0,0)$，$P(0,0,\sqrt{2})$，$\because M$ 为 PC 的中点，
$\therefore M(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\therefore \overrightarrow{MA}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$，$\overrightarrow{PB}=(0,\sqrt{2},-\sqrt{2})$，

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$



由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0\end{cases}$ 得，$\begin{cases}-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0\\ \sqrt{2}y-\sqrt{2}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-z\\ y=z\end{cases}$
取 $z=1$，得 $\vec{n}=(-1,1,1)$，

$$\therefore \sin\theta=|\cos<\vec{n},\overrightarrow{MA}>|=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{MA}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{MA}|}=\frac{\left|-\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\therefore AM$ 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　……………………………12 分
21．解：（1）由对称性，点 $(-2,1)$ 和点 $(-2,-2)$ 不可能同时在抛物线 T 上，点 $(-2,-2)$ 和点 $(3,-2)$ 也不可能同时在抛物线 T 上；设 $T:x^2=2py(p>0)$，若过点 $(-2,1)$，则 $4=2p$，$p=2$，$\therefore x^2=4y$，过点 $(1,\frac{1}{4})$，$\therefore x^2=4y$ 符合题意；设 $T:y^2=2px(p>0)$，若过点 $(1,\frac{1}{4})$，则 $\frac{1}{16}=2p, p=\frac{1}{32}, \therefore y^2=\frac{1}{16}x$，不过点 $(3,-2)$，不合题意．
综上，抛物线 T 的方程为 $x^2=4y$　……………………………4 分
（1）设 $P(m,-1)$，$AB:y=k_1(x-m)-1$，即 $k_1x-y-k_1m-1=0$，
由 AB 与圆相切得 $\frac{|3+k_1m|}{\sqrt{k_1^2+1}}=\sqrt{3}, \therefore (m^2-3)k_1^2+6mk_1+6=0$，

②-①得$(a_{n+1}+1)(a_{n+2}-a_n)=\lambda(a_{n+1}+1)$，又$a_{n+1}+1>0$，$\therefore a_{n+2}-a_n=\lambda$． ……………………6分

$\therefore$数列$\{a_n\}$的奇数项和偶数项分别成等差数列，公差均为λ，且$\lambda=2$，

又$\because a_1=a_2=1$，$\therefore a_{21}=a_1+10\lambda=10\lambda+1=21$，　$a_{22}=a_2+10\lambda=11\lambda-1=21$，

$\therefore T_{20}=\frac{1}{a_1a_3}+\frac{1}{a_2a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{20}a_{22}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_{20}}-\frac{1}{a_{22}})$

$=\frac{1}{2}(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{21}}-\frac{1}{a_{22}})=\frac{1}{2}(1+1-\frac{1}{21}-\frac{1}{21})=\frac{20}{21}$． ……………………12分

19．解：(1) 因为猎人每次射击击中猎物的概率与他和猎物之间的距离成反比，设第i次射击击中猎物的概率为$p_i(i\in N^*)$，猎人和猎物之间的距离为$d_i(i\in N^*)$，则$p_i=\frac{k}{d_i}$(k为常数，$i\in N^*$)，$\because p_1=\frac{3}{5}$，$d_1=100$，

$\therefore k=p_1\cdot d_1=60$，$\therefore p_i=\frac{60}{d_i}$，$\therefore p_2=\frac{60}{150}=\frac{2}{5}$，　$p_3=\frac{60}{200}=\frac{3}{10}$，　$p_4=\frac{60}{250}=\frac{6}{25}$ ……………4分

当$i\geq 5$时，$p_i\leq\frac{60}{300}=\frac{1}{5}<\frac{2}{9}$，停止射击．设猎人的射击次数为$X$，则$X$的所有取值为1,2,3,4

$P(X=1)=\frac{3}{5}$，$P(X=2)=(1-\frac{3}{5})\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$，来源：高三答案公众号

$P(X=3)=(1-\frac{3}{5})\times(1-\frac{2}{5})\times\frac{3}{10}=\frac{9}{125}$，$P(X=4)=(1-\frac{3}{5})\times(1-\frac{2}{5})\times(1-\frac{3}{10})=\frac{21}{125}$．

$\therefore X$的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{9}{125}$	$\frac{21}{125}$

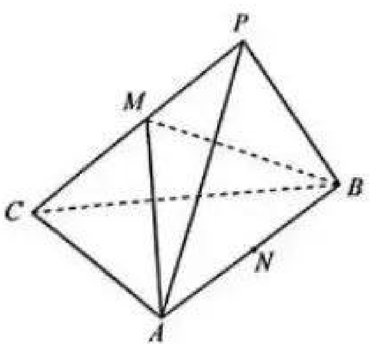
$\therefore X$的数学期望为$E(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{4}{25}+3\times\frac{9}{125}+4\times\frac{21}{125}=\frac{226}{125}$ ……………………8分

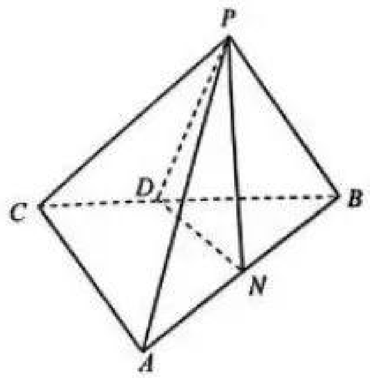
(2) 记"第i次射击击中猎物"为事件A_i，$i=1,2,\cdots$，则n次连续射击至少击中猎物一次的概率为

$P=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A_n})=1-(1-\frac{3}{5})^n>\frac{98}{100}$，故$n>\frac{2\ln 5+\ln 2}{\ln 5-\ln 2}\approx\frac{2\times 1.609+0.693}{1.609-0.693}\approx 4.270$，

所以至少要连续射击5次． ……………………12分

20．解：





(1) 证明：(证法一) 连结CN(如图)，在$Rt\triangle ABC$中，$\because N$为斜边AB的中点，$\therefore AN=BN=CN$，又$\because$

设 $CD: y=k_2(x-m)-1$，同理可得 $(m^2-3)k_2^2+6mk_2+6=0$，

$\therefore k_1,k_2$ 是方程 $(m^2-3)k^2+6mk+6=0$ 的两根， $k_1+k_2=\dfrac{-6m}{m^2-3}, k_1k_2=\dfrac{6}{m^2-3}$ ……………………………8 分

联立 $\begin{cases} y=k_1(x-m)-1 \\ x^2=4y \end{cases}$，消 y 得 $x^2-4k_1x+4k_1m+4=0$，$\therefore x_1x_2=4k_1m+4$，同理 $x_3x_4=4k_2m+4$，

$\therefore x_1x_2x_3x_4=(4k_1m+4)(4k_2m+4)=16\left[k_1k_2m^2+(k_1+k_2)m+1\right]=16(\dfrac{6m^2}{m^2-3}-\dfrac{6m^2}{m^2-3}+1)=16$

所以 $x_1x_2x_3x_4$ 为定值 16. ……………………………………………………………………12 分

22. 解：(1) 若 $a=0$，则 $f(x)=-x^2(\ln x+\dfrac{1}{2})$ 要证 $f(x)\ge\dfrac{x^2}{2}-x^3$，即证 $\ln x\le x-1$.

令 $r(x)=\ln x-x+1$，则 $r'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，当 $0<x<1$ 时，$r'(x)>0$，$\therefore r(x)$ 单调递增，当 $x>1$ 时，$r'(x)<0$，

$\therefore r(x)$ 单调递减，$\therefore r(x)\le r(1)$，即 $\ln x\le x-1$，得证. ……………………………………………4 分

(2) 令 $x_1=\dfrac{\ln x}{x-1}$，$x_2=\dfrac{x\ln x}{x-1}$，则 $\begin{cases} \dfrac{x_2}{x_1}=x \\ x_2-x_1=\ln x \end{cases}$，消 x 得，$e^{x_2-x_1}=\dfrac{x_2}{x_1}$，$\therefore \dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$，$\because x>1$，$\therefore x_2>x_1>0$

原不等式等价于 $\dfrac{x_2}{x_1}g(x_1)<g(x_2)\Leftrightarrow\dfrac{g(x_1)}{x_1}<\dfrac{g(x_2)}{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)+\dfrac{x_1}{e^{x_1}}<f(x_2)+\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$

$\because \dfrac{x_1}{e^{x_1}}=\dfrac{x_2}{e^{x_2}}$，$\therefore$ 等价于 $f(x_1)<f(x_2)$，$\because x_2>x_1>0$，$\therefore f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore f'(x)\ge 0$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$\because f'(x)=2(ae^{2x-1}-x\ln x-x)$，$\therefore ae^{2x-1}-x\ln x-x\ge 0\ \forall x>0$ 恒成立 ………………6 分

方法 1：即 $ae^{2x-1}\ge x(1+\ln x)\Leftrightarrow a\ge\dfrac{ex(1+\ln x)}{e^{2x}}$

由 (1) 知 $\ln x+1\le x$，$\therefore ex\le e^x$，$\therefore (ex)^2\le e^{2x}$，

$\therefore \dfrac{ex(1+\ln x)}{e^{2x}}\le\dfrac{ex(1+\ln x)}{(ex)^2}\le\dfrac{ex\cdot x}{(ex)^2}=\dfrac{1}{e}$，当 $x=1$ 时取 "="，$\therefore a\ge\dfrac{1}{e}$ ……………………………………12 分

方法 2：$ae^{2x-1}>x(1+\ln x)\Leftrightarrow ae^{2x}>ex\cdot\ln(ex)$，左右同乘以 2x，

则有 $a\cdot 2x\cdot e^{2x}>ex^2\cdot\ln(ex)^2$，$\therefore ae\cdot 2x\cdot e^{2x}>(ex)^2\cdot\ln(ex)^2$，

令 $h(x)=xe^x$，则 $ae\cdot h(2x)\ge h[\ln(ex)^2]$，$\because h'(x)=(x+1)e^x$，

当 $(-\infty,-1)$ 时，$h'(x)<0$，$\therefore h(x)$ 单调递减，当 $(-1,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，$\therefore h(x)$ 单调递增，

$\because \ln(ex)^2=2(1+\ln x)\le 2x$，$2x>0$，$\therefore h[\ln(ex)^2]\le h(2x)$，且 $h(2x)>0$，$\therefore ae\ge 1$，$\therefore a\ge\dfrac{1}{e}$ …………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。