2023 届大湾区普通高中毕业班联合模拟考试（二）

数学参考答案与评分细则

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	D	D	C	D	B	A	A

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

题号	9	10	11	12
答案	BD	AD	CD	BD

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$-\frac{1}{n}$　　14．m_2　　15．$\frac{4}{3}$　　16．6

四、解答题：本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

17．（10 分）

（1）由题意，设$\{a_n\}$的公差为$d(d>0)$，

则$b_2=a_2=1+d, b_3=a_5=1+4d, b_4=a_{14}=1+13d$　　…………1 分

由$\{b_n\}$是等比数列，所以$(1+4d)^2=(1+d)(1+13d)$，

解得：$d=2$，$d=0$（舍去）　　…………2 分

所以$a_n=1+2(n-1)=2n-1$　　…………3 分

又$b_2=a_2=3, b_3=a_5=9$，所以$\{b_n\}$的公比$q=\frac{b_3}{b_2}=3$　　…………4 分

所以$b_n=b_2q^{n-2}=3^{n-1}$　　…………5 分

（2）由 $\frac{c_1}{b_2}+\frac{c_2}{b_3}+\cdots+\frac{c_n}{b_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{3}$ ①

得：$\frac{c_1}{b_2}=\frac{a_2}{3}=1$，所以 $c_1=3$ …………6 分

当 $n\geq 2$ 时，$\frac{c_1}{b_2}+\frac{c_2}{b_3}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{b_n}=\frac{a_n}{3}$ ②，①-②得：$\frac{c_n}{b_{n+1}}=\frac{a_{n+1}-a_n}{3}=\frac{2}{3}$

所以 $c_n=\frac{2}{3}b_{n+1}=2\cdot 3^{n-1}\ (n\geq 2)$ …………7 分

从而 $c_n=\begin{cases}3, & n=1\\ 2\cdot 3^{n-1}, & n\geq 2\end{cases}$ …………8 分

所以 $n=1$ 时，$S_1=c_1=3$

$n\geq 2$ 时，$S_n=3+2\times\left(3+3^2+\cdots+3^{n-1}\right)=3+2\times\frac{3\left(1-3^{n-1}\right)}{1-3}=3^n$ …………9 分

综上：$S_n=3^n$，$n\in N^*$ …………10 分

18.（12 分）

解：（1）因为 $2a\sin C\cos B=a\sin A-b\sin B+\frac{\sqrt{5}}{2}b\sin C$

由正弦定理得 $2ac\cos B=a^2-b^2+\frac{\sqrt{5}}{2}bc$ …………1 分

由余弦定理得 $2ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a^2-b^2+\frac{\sqrt{5}}{2}bc$ …………2 分

所以 $c=\frac{\sqrt{5}}{2}b$ …………3 分

又因为 $c=2\sqrt{5}$，所以 $b=4$ …………4 分

（2）因为 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$ …………5 分

所以 $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$ …………6 分

所以 $\overrightarrow{AB}^2=4\overrightarrow{AD}^2-4\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2$ …………7 分

因为 $\cos\angle CAD=\dfrac{3}{8}$

所以 $20=4\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-4\left|\overrightarrow{AD}\right|\times4\times\dfrac{3}{8}+16$ …………8 分

化简得 $2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-3\left|\overrightarrow{AD}\right|-2=0$，解得 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=2$ 或 $\left|\overrightarrow{AD}\right|=-\dfrac{1}{2}$（舍去）…………9 分

因为 $\sin\angle DAC=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{55}}{8}$ …………10 分

所以 $S_{\triangle ADC}=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\sin\angle DAC=\dfrac{1}{2}\times2\times4\times\dfrac{\sqrt{55}}{8}=\dfrac{\sqrt{55}}{2}$ …………11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ADC}=2\times\dfrac{\sqrt{55}}{2}=\sqrt{55}$ …………12 分

19.（12 分）

（1）在等腰梯形 BB_1C_1C 中，作 $B_1D\perp BC$，则 $BD=1$

在 $Rt\triangle BDB_1$ 中，$B_1D=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$ …………1 分

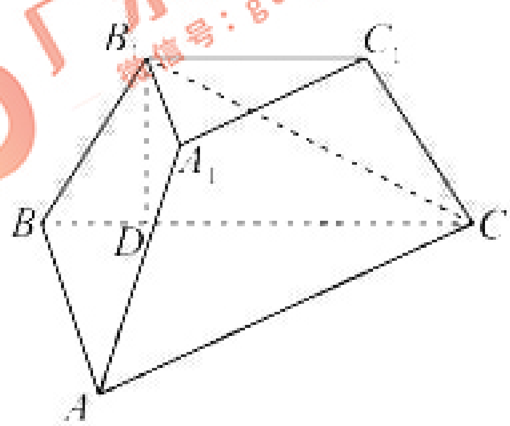
连 B_1C，在 $Rt\triangle CDB_1$ 中，$DC=3$，解得 $B_1C=2\sqrt{3}$ …………2 分

$\therefore B_1B^2+B_1C^2=BC^2$，即 $B_1C\perp B_1B$ …………3 分

由平面 $AA_1B_1B\perp$ 平面 BB_1C_1C，平面 $AA_1B_1B\cap$ 平面 $BB_1C_1C=B_1B$，$B_1C\perp B_1B$

$\therefore B_1C\perp$ 平面 AA_1B_1B …………4 分

$\therefore B_1C\perp AB$ …………5 分



$\because AB\perp BC$，$BC\cap B_1C=C$，$BC,B_1C\subset$ 平面 BB_1C_1C

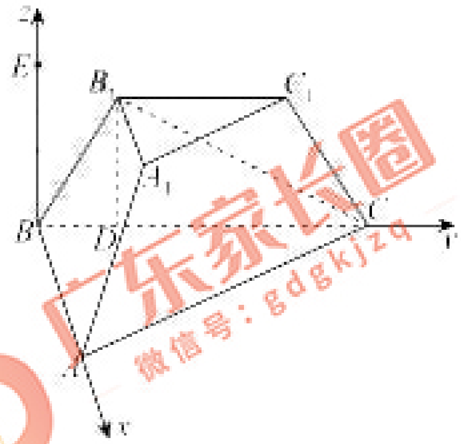
$\therefore AB\perp$ 平面 BB_1C_1C …………6 分

（2）方解法 1：如图，在平面 BB_1C_1C 内，过点 B 作 $BE\perp BC$

以 B 为原点，以 BA,BC,BE 所在的直线为 x,y,z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示

设 $AB=t$，$t>0$，则 $A(t,0,0),C(0,4,0),C_1(0,3,\sqrt{3})$ …………7 分

$\therefore \overrightarrow{AC}=(-t,4,0),\overrightarrow{CC_1}=(0,-1,\sqrt{3})$



设平面 ACC_1 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

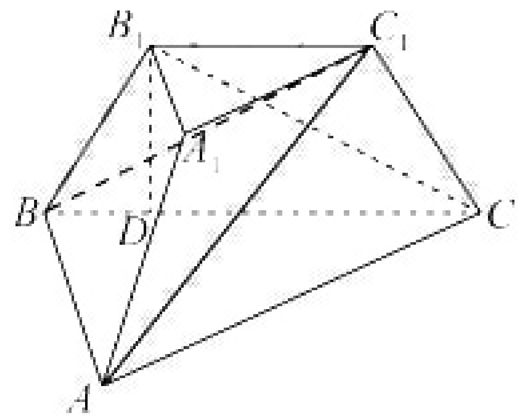
则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{CC_1}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-tx+4y=0\\ -y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$，则 $\vec{n}=(\frac{4\sqrt{3}}{t},\sqrt{3},1)$

平面 BB_1C_1C 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$ ………9 分

则 $\left|\cos\left\langle\vec{n},\vec{m}\right\rangle\right|=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{\frac{4\sqrt{3}}{t}}{\sqrt{\frac{48}{t^2}+3+1}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，解得 $t=2$ …………11 分

即 $AB=2$ …………12 分

解法 2：连 BC_1，AC_1，



由已知及（1）得 $BC_1\perp CC_1$，$BC_1=2\sqrt{3}$ ………7 分

因为 $AB\perp$ 平面 BB_1C_1C，$CC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C

所以 $AB\perp C_1C$

因为 $AB\cap BC_1=B$

所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC_1，AC_1 在平面 ABC_1 内

所以 $CC_1\perp AC_1$

所以 $\angle BC_1A$ 为二面角 $B-C_1C-A$ 的平面角 …………9 分

即 $\angle BC_1A=\frac{\pi}{6}$ ………10 分

在 $Rt\Delta BC_1A$ 中，$\tan\angle BC_1A=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{AB}{BC_1}=\frac{AB}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ………11 分

解得 $AB=2$ ………12 分

20.（12 分）

解：(1) X 的可能取值为0，1，2 …………1 分

$$P(X=0)=C_2^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^0\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$$P(X=1)=C_2^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^1=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

$$P(X=2)=C_2^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^0=\frac{1}{16}$$ …………3 分

(注：不全对也不含错情况下，给 1 分)

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

…………4 分

$$E(X)=0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$$

或由 $X\sim B\left(2,\frac{1}{4}\right)$ 得：$E(X)=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ …………5 分

(2) 对于方案一，“机器发生故障时不能及时维修”等价于“甲、乙、丙三人中，至少有一人负责的 2 台机器同时发生故障”，考虑从反面处理这个问题，

$$P_1=1-\left[1-P(X=2)\right]^3$$ …………7 分

$$=1-\left(1-\frac{1}{16}\right)^3=\frac{16^3-15^3}{16^3}=\frac{4096-3375}{4096}=\frac{721}{4096}$$ …………8 分

（注：正面分类处理同样给分，直接写最后的算式，没有任何铺垫的扣一分）

对于方案二，机器发生故障时不能及时维修的概率

$$P_2=1-C_6^0\times\left(\frac{1}{4}\right)^0\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^6-C_6^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^5-C_6^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{4}\right)^4$$ …10 分

$$=1-\frac{3^6}{4^6}-\frac{6\times3^5}{4^6}-\frac{15\times3^4}{4^6}=\frac{4^6-3^5\times(3+6+5)}{4^6}=\frac{4096-3402}{4096}=\frac{694}{4096}=\frac{347}{2048}$$

…………11 分

（注：正面处理同样给分，直接写算式扣一分，最后结果没有约分不扣分）

所以 $P_2<P_1$，即方案二能让故障机器更大概率得到及时维修，使得工厂的生产效率效率更高。（注：意思相同即可.） …………12 分

21.（12 分）

解：（1）记 $F_1(-1,0)$，则 O 为 F_1F 中点，M 为 AF 中点，所以 $|AF_1|=2|OM|$ ……1 分

$$|AF_1|+|AF|=2|OM|+2|MF|=2|OM|+2|MP|=2(|OM|+|MP|)$$

$$=2|OP|=4>|F_1F|=2$$ …………2 分

所以 A 的轨迹是长轴长为 4，焦距为 2 的椭圆 …………3 分

所以点 A 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ …………4 分

（2）设 F 到直线 n 的距离为 h，设 $S(x_1,y_1),R(x_2,y_2),H(x_H,y_H)$

$$\lambda=\frac{S_{MHR}}{S_{MHS}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot HR\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot HS\cdot h}=\frac{HR}{HS},\quad \mu=\frac{S_{MGS}}{S_{MGR}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot GS\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot GR\cdot h}=\frac{GS}{GR}$$ …………5 分

$$\lambda\mu=\frac{HR\cdot GS}{HS\cdot GR}=\frac{(y_2-y_H)y_1}{(y_H-y_1)y_2}$$ …………6 分

设直线 $n:x=ty+4$，令 $x=1$，$H(1,-\frac{3}{t})$ …………7 分

进而 $\lambda\mu=\dfrac{(y_2+\frac{3}{t})y_1}{(-\frac{3}{t}-y_1)y_2}=\dfrac{ty_1y_2+3y_1}{-3y_2-ty_1y_2}$ …………8 分

联立 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \\ x=ty+4 \end{cases}$,消去 x,得 $(3t^2+4)y^2+24ty+36=0$

所以 $y_1+y_2=\dfrac{-24t}{3t^2+4}$,$y_1y_2=\dfrac{36}{3t^2+4}$, $ty_1y_2=-\dfrac{3}{2}(y_1+y_2)$ …………10 分

所以 $\lambda\mu=\dfrac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_1}{-3y_2+\frac{3}{2}(y_1+y_2)}=\dfrac{\frac{3}{2}(y_1-y_2)}{\frac{3}{2}(y_1-y_2)}=1$ …………11 分

所以 $\lambda\cdot\mu$ 是为定值 1 …………12 分

22.(12 分)

解:(1)当 $a=1$ 时 $f(x)=\dfrac{x^2}{e^{x-1}}-\ln x-1$, $f(1)=0$ …………1 分

$f'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^{x-1}}-\dfrac{1}{x}$, $f'(1)=0$ …………2 分

曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ 即为 $y=0$

所以曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y=0$ …………3 分

(2)方法一:令 $f(x)=0$,则 $\dfrac{x^2}{e^{x-a}}-\ln x-a=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{e^{x-a}}=\ln x+a=\ln\left(e^a\cdot x\right)$

即 $\dfrac{e^a\cdot x^2}{e^x}=\ln\left(e^a\cdot x\right)$,即 $\dfrac{x}{e^x}=\dfrac{\ln\left(e^a\cdot x\right)}{e^a\cdot x}$,即 $\dfrac{\ln\left(e^x\right)}{e^x}=\dfrac{\ln\left(e^a\cdot x\right)}{e^a\cdot x}$

令 $\varphi(t)=\dfrac{\ln t}{t}$,则上述方程可化为 $\varphi(e^x)=\varphi(e^a\cdot x)$ (*), …………4 分

$f(x)$ 零点个数即为方程(*)的根个数,

则 $\varphi'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$，令 $\varphi'(t)=0$，得 $t=e$，

t	$(0,e)$	e	$(e,+\infty)$
$\varphi'(t)$	$+$	0	$-$
$\varphi(t)$	$\nearrow$		$\searrow$

易知 $t=e$ 为是唯一的极大值点，且 $\varphi(t)_{\max}=\varphi(e)=\frac{1}{e}$， …………5 分

令 $h(x)=\varphi(e^x)-\varphi(e^a\cdot x)$，当 $a>1$ 时，$e^a>e, e^a x>ex$，

① 当 $x>1$ 时，$e^x>e, e^a x>ex>e$，而 $\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$ 在 $(e,+\infty)$ 上单调递减，

为解方程 $\varphi(e^x)=\varphi(e^a\cdot x)$，只需解方程 $e^x=e^a\cdot x$，

令 $e^x=e^a\cdot x, x\in(1,+\infty)$，即 $\frac{e^x}{x}=e^a$，令 $m(x)=\frac{e^x}{x}$，$m'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

令 $m'(x)=0$，得 $x=1$，列表如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$m'(x)$	$-$	0	$+$
$m(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$m(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，$m(x)_{\min}=m(1)=e<e^a$，故 $m(x)=\frac{e^x}{x}\ge e\Rightarrow e^x\ge ex$，

$m(1)=e<e^a$，$m(e^a)=\frac{e^{e^a}}{e^a}\ge\frac{e^{ea}}{e^a}>\frac{e^{2a}}{e^a}=e^a$，

根据零点存在定理，存在唯一的 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $m(x_0)=\frac{e^{x_0}}{x_0}=e^a$，即 $e^{x_0}=e^a\cdot x_0$，

所以$\varphi(e^{x_0})=\varphi(e^a\cdot x_0)$，故方程（*）在$(1,+\infty)$上有唯一解$x_0$． …………7 分

② 当$x=1$时，$\varphi(e)=\varphi(e^a)$不成立，故$x=1$不是（*）的解； …………8 分

③ 当$0<x<1$时，

（i）当$x\in[\frac{1}{e^{a-1}},1), e^x<e, e^a\cdot x>e$，所以$\varphi(e^x)$单调递增，$\varphi(e^a\cdot x)$单调递减，

故$h(x)=\varphi(e^x)-\varphi(e^a\cdot x)$在$[\frac{1}{e^{a-1}},1)$上单调递增，

$$h(1)=\varphi(e)-\varphi(e^a)=\frac{1}{e}-\varphi(e^a)>0$$

$$h(\frac{1}{e^{a-1}})=\varphi(e^{\left(\frac{1}{e^{a-1}}\right)})-\varphi(e)=\varphi(e^{\left(\frac{1}{e^{a-1}}\right)})-\frac{1}{e}<0$$

根据零点存在定理，$h(x)$在$[\frac{1}{e^{a-1}},1)$上存在唯一零点； …………10 分

（ii）当$x\in(0,\frac{1}{e^{a-1}})$，则$e^x<e, e^a\cdot x<e$，而$\varphi(t)=\frac{\ln t}{t}$在$(0,e)$上单调递增，

为解方程$\varphi(e^x)=\varphi(e^a\cdot x)$，只需解方程$e^x=e^a\cdot x$

令$g(x)=e^x-e^a\cdot x,\ x\in(0,\frac{1}{e^{a-1}})$，

因为$g'(x)=e^x-e^a<0$，所以$g(x)$在$(0,\frac{1}{e^{a-1}})$上单调递减，

又$g(\frac{1}{e^{a-1}})=e^{\left(\frac{1}{e^{a-1}}\right)}-e<0$，$g(0)=1>0$，

故存在唯一$x_1\in(0,\frac{1}{e^{a-1}})$，$g(x_1)=0$，即$e^{x_1}=e^a\cdot x_1$，即$\varphi(e^{x_1})=\varphi(e^a\cdot x_1)$

故方程$\varphi(e^x)=\varphi(e^a\cdot x)$在区间$(0,\frac{1}{e^{a-1}})$上存在唯一解$x_1$，

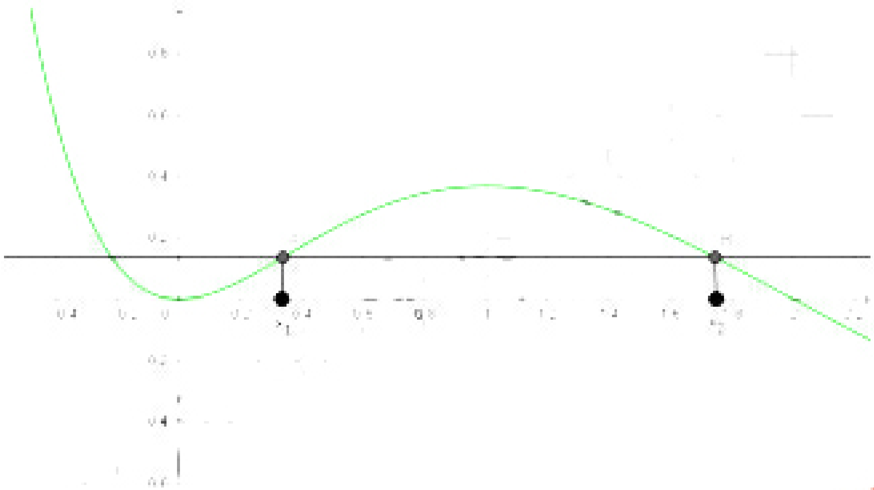
综上①②③：当$a>1$时，$\varphi(e^x)=\varphi(e^a\cdot x)$存在三个解，故$f(x)$有三个零点…………12 分

（2）方法二：$f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^{x-a}}-\frac{1}{x}=\frac{e^a}{x}(\frac{2x^2-x^3}{e^x}-\frac{1}{e^a})$ …………4 分

令 $h(x)=\frac{2x^2-x^3}{e^x}(x>0), h'(x)=\frac{x\cdot\left(x^2-5x+4\right)}{e^x}$，令 $h'(x)=0$ 得 $x=1,4$

x	$(0,1)$	1	$(1,4)$	4	$(4,+\infty)$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$h(x)$ 的图像如下图象：



因为 $h(0)=0, h(1)=\frac{1}{e}>\frac{1}{e^a}, h(2)=0$，所以 $f'(x)=\frac{e^a}{x}(h(x)-\frac{1}{e^a})=0$ 有两个根，记为 x_1,x_2，$x_1<1<x_2<2$，当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 关系如下表：

x	$(0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

注意到 $x_1<1<x_2<2$ 且 $f(1)=\frac{1}{e^{1-a}}-a=e^{a-1}-a>a-a=0$(此处用到 $e^x\ge x+1$)

$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 上单增，$f(x_2)>f(1)>0$，　　…………6 分

又因为 $0<x_1<1$ 且 $f'(x_1)=0\Rightarrow\dfrac{2x_1^2-x_1^3}{e^{x_1}}=\dfrac{1}{e^a}$

即 $e^a=\dfrac{e^{x_1}}{2x_1^2-x_1^3}$，$a=x_1-\ln(2x_1^2-x_1^3)$，

所以 $f(x_1)=\dfrac{x_1^2}{e^{x_1-a}}-\ln x_1-a=\dfrac{e^{x_1}}{2x_1^2-x_1^3}\cdot\dfrac{x_1^2}{e^{x_1}}-\ln x_1-x_1+\ln(2x_1^2-x_1^3)$

$=\dfrac{1}{2-x_1}-x_1+\ln x_1+\ln(2-x_1)$，$(0<x_1<1)$　　…………7 分

令 $m(t)=\dfrac{1}{2-t}-t+\ln t+\ln(2-t)$，$(0<t<1)$，$m(1)=0$

$m'(t)=\dfrac{1}{(t-2)^2}-1+\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t-2}=\dfrac{(1-t)^2\cdot(4-t)}{t(t-2)^2}>0$

$m'(t)>0$，故 $m(t)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $m(t)<m(1)=0$，即 $f(x_1)<0$．……8 分

先证：$\dfrac{x^2}{e^x}\le\dfrac{4}{e^2}(x>0)$，为此，令 $u(x)=\dfrac{x^2}{e^x}(x>0)$，$u'(x)=\dfrac{2x-x^2}{e^x}=\dfrac{x(2-x)}{e^x}$

当 $x\in(0,2)$ 时，$u'(x)>0$，$u(x)$ 单调递增；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$u'(x)<0$，$u(x)$ 单调递减，

$u(x)_{\max}=u(2)=\dfrac{4}{e^2}$，所以 $\dfrac{x^2}{e^x}\le\dfrac{4}{e^2}(x>0)$，所以 $f(x)\le e^a\dfrac{4}{e^2}-\ln x-a$，

$f(e^a)\le e^a\dfrac{4}{e^2}-\ln e^a-a=e^a(\dfrac{4}{e^2}-1)-a<0$，　　……9 分

而 $f(x)=\frac{x^2}{e^{x-a}}-\ln x-a>-\ln x-a$，故 $f(\frac{1}{e^a})>-\ln\frac{1}{e^a}-a=a-a=0$，

所以 $f(\frac{1}{e^a})>0$， ……10 分

又 $f'(\frac{1}{e^a})=\frac{e^a}{\frac{1}{e^a}}(h(\frac{1}{e^a})-\frac{1}{e^a})$，

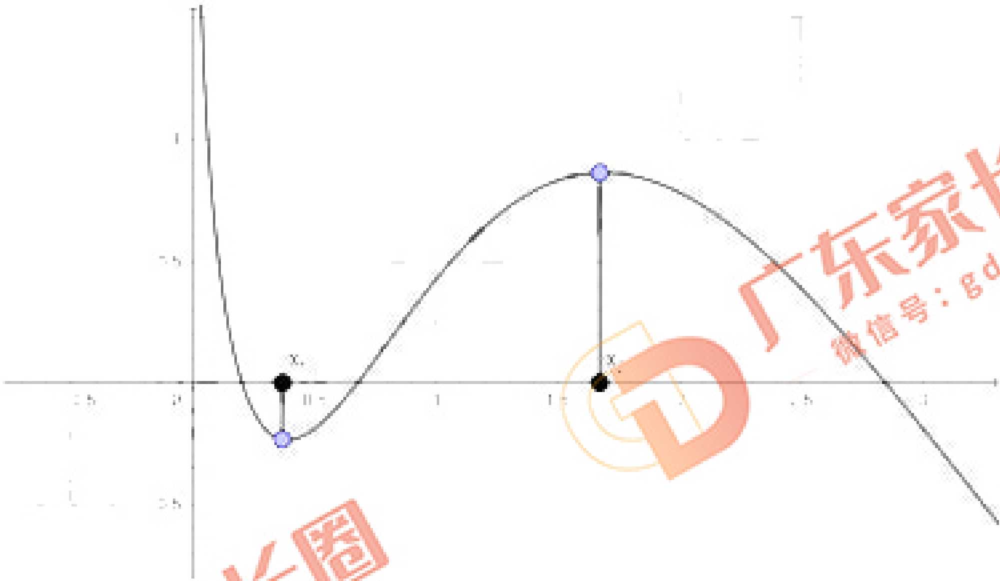
而 $h(\frac{1}{e^a})-\frac{1}{e^a}=\frac{2\left(\frac{1}{e^a}\right)^2-\left(\frac{1}{e^a}\right)^3}{e^{\frac{1}{e^a}}}-\frac{1}{e^a}=\frac{1}{e^a}\left[\frac{2\left(\frac{1}{e^a}\right)-\left(\frac{1}{e^a}\right)^2}{e^{\left(\frac{1}{e^a}\right)}}-1\right]<\frac{1}{e^a}\left[\frac{2\left(\frac{1}{e^a}\right)}{e^{\left(\frac{1}{e^a}\right)}}-1\right]$

$<\frac{1}{e^a}\left[\frac{2\left(\frac{1}{e^a}\right)}{1+\frac{1}{e^a}}-1\right]=\frac{1}{e^a}\cdot\frac{\frac{1}{e^a}-1}{1+\frac{1}{e^a}}<0$，故 $f'(\frac{1}{e^a})<0$，故 $\frac{1}{e^a}<x_1$

综上：$\frac{1}{e^a}<x_1<1$，$x_2>1, e^a>2$； ……11 分

$f(\frac{1}{e^a})>0, f(x_1)<0$，$f(1)>0, f(x_2)>0$，$f(e^a)<0$，

$f(x)$ 在 (x_1,x_2) 单调递增，在 $(0,x_1)$，$(x_2,+\infty)$ 上单调递减. （如下图示）



根据零点存在定理，$f(x)$ 有 3 个零点；

综上：当 $a>1$ 时，$f(x)$ 有三个零点.　　　　…………12 分