2023年葫芦岛市普通高中高三年级第一次模拟考试

数学

参考答案及评分标准

一、单项选择题

1—4：CBAC　　5—8：ABCC

二、多项选择题

9．ABD　10．AD　11．ABC　12．ABD

三、填空题

13．答案示例：（3，4），说明：零点约为3.40，只要是含有零点的区间均可．

14．0.035　$\frac{500}{7}$　15．$\sqrt{3}$　16．4

四、解答题

17．（本小题满分10分）

（1）由题意得，$\begin{cases} a_1+a_2+a_3=9 \\ a_2\cdot a_4=21 \end{cases}$ 解得，$d=2$，$a_1=1$

从而，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)d}{2}=n^2$

（2）由题意得，$\begin{cases} b_2+b_3=\frac{3}{4} \\ b_2b_3b_4=\frac{1}{64} \end{cases}$，$b_3=\frac{1}{4}$，$b_2=\frac{1}{2}$，$q=\frac{1}{2}$，所以 $b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

又 $c_n=\sqrt{S_n}b_n=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，令 $T_n=c_1+c_2+c_3+\ldots+c_n$，

有 $T_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{2}T_n=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots(n-1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

两式相减得，$\frac{1}{2}T_n=\left(\frac{1}{2}\right)^0+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n$

整理得 $T_n=4-(n+2)\frac{1}{2^{n-1}}<4$．

18．（本小题满分12分）

（1）在$\triangle ABC$中，由已知 $\sin(A-B)=\sin(A+B)-\sin(A+C)$，可得：

则有：$\sin A\cos B-\cos A\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B-\sin B$，

即 $2\cos A\sin B-\sin B=0$

又 $\sin B\neq 0$，即有 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，

而 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\dfrac{\pi}{3}$.

（2）在 $\triangle ABC$ 中，由（1）知 $A=\dfrac{\pi}{3}$，因为 AD 为角 A 的角平分线，

则有 $\angle BAD=\angle CAD=30^\circ$，

由 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}$ 得：

$\dfrac{1}{2}\times 3\times 6\times\sin 60^\circ=\dfrac{1}{2}\times AD\times 6\times\sin 30^\circ+\dfrac{1}{2}\times 3\times AD\times\sin 30^\circ$

解得 $AD=2\sqrt{3}$，

所以线段 AD 的长为 $2\sqrt{3}$.

19.（本小题满分 12 分）

（1）设 F 为 PA 中点，连接 EF、BF，因为 E 为 PD 的中点，

所以 EF 是三角形 PAD 的中位线，

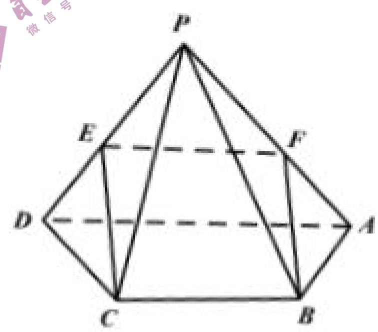
所以 $EF\,//\,AD$ 且 $EF=\dfrac{1}{2}AD$

又因为 $AD\,//\,BC$，$AD=4$，$AB=BC=2$．所以 $BC=\dfrac{1}{2}AD$

所以 $BC=EF$，$BC\,//\,EF$．所以四边形 $BCEF$ 是平行四边形

所以 $EC\,//\,BF$，又 $CE\not\subset$ 平面 PAB，$BF\subset$ 平面 PAB

所以 $CE\,//$ 平面 PAB；



（2）过 P 作 $PO\perp AD$ 于 O，连接 OC.

因为 $AB\perp AD$，又因为 $AB\perp PA$，

且 $AD\cap PA=A$，所以 $AB\perp$ 平面 PAD.

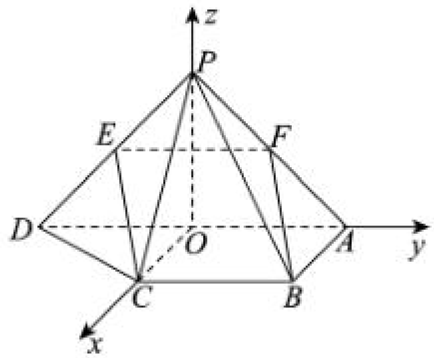
又 $AB\subset$ 平面 $ABCD$，所以平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.

因为 $PA=PD$，所以 O 为 AD 中点，

又因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$.

又 $OC \subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PO \perp OC$

如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$.



设 $PO=a$. 由题意得，A（0，2，0），B（2，2，0），C（2，0，0），D（0，−2，0），P（0，0，a）.

所以 $\overrightarrow{AB}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{PA}=(0,2,-a)$，$\overrightarrow{AD}=(0,4,0)$.

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{PA}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ 2y-az=0\end{cases},$$

令 z=2，则 y=a．所以 $\vec{n}=(0,a,2)$.

选择条件①

$V_{P-ABCD}=\frac{1}{3}\times S_{ABCD}\times PO=\frac{1}{3}\times\frac{4+2}{2}\times 2\times a=4$，解得 $a=2$，

设 D 到平面 PAB 的距离为 d，

所以 $d=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|4a|}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

选择条件②

连接 OB，则 OB 是 PB 在平面 $ABCD$ 内的射影，则直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\angle OBP$，

在 $Rt\triangle POB$ 中，$\sin\angle OBP=\frac{OP}{BP}=\frac{a}{BP}$，

在 $Rt\triangle AOB$ 中，$BO=\sqrt{AO^2+AB^2}=2\sqrt{2}$，

$BP=\sqrt{PO^2+BO^2}=\sqrt{8+a^2}$，所以 $\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{a}{BP}$，所以 $a=2$，

设 D 到平面 PAB 的距离为 d，

所以 $d=\frac{\left|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD}\right|}{|\vec{n}|}=\frac{|4a|}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$，

20.（本小题满分 12 分）

（1）设$P(x,y)$，依题意则有$\frac{y}{x-2}\cdot\frac{y}{x+2}=-\frac{3}{4}$

整理得点P的轨迹为M为，$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq 0)$

（2）设直线CD为：$y=k_1(x+1)$①

设直线EF为：$y=k_2(x-1)$②

将①与曲线M联立得：$(3+4k_1^2)x^2+8k_1x+4k_1^2-12=0$，$\Delta>0$，

设$C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，$x_1+x_2=\frac{-8k_1}{3+4k_1^2}$，

$x_1x_2=\frac{4k_1^2-12}{3+4k_1^2}$ $|CD|=\sqrt{1+k_1^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\frac{12(1+k_1^2)}{3+4k_1^2}$

将②与曲线M联立得：$(3+4k_2^2)x^2-8k_2x+4k_2^2-12=0$，$\Delta>0$，

设$E(x_3,y_3)$，$F(x_4,y_4)$，$x_3+x_4=\frac{8k_2}{3+4k_2^2}$，$x_3x_4=\frac{4k_2^2-12}{3+4k_2^2}$

$|EF|=\sqrt{1+k_2^2}\sqrt{(x_3+x_4)^2-4x_3x_4}=\frac{12(1+k_2^2)}{3+4k_2^2}$

$$\frac{1}{|CD|}+\frac{1}{|EF|}=\frac{3+4k_1^2}{12(1+k_1^2)}+\frac{3+4k_2^2}{12(1+k_2^2)}=\frac{8k_1^2k_2^2+7(k_1^2+k_2^2)+6}{12(1+k_1^2+k_2^2+k_1^2k_2^2)}=\frac{7}{12}$$

$k_1^2k_2^2=1$，所以$k_1k_2=\pm1$

21.（本小题满分 12 分）

（1）设感染诺如病毒的患者为x人，则感染甲流的患者为$2x$人，

感染两种病毒的 60 岁以上的患者人数均为$\frac{2}{3}x$，由题意必有$K^2>7.879$，

而$\frac{3x\left(\frac{2}{3}x\times\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}x\times\frac{4}{3}x\right)^2}{\frac{3}{2}x\times\frac{3}{2}x\times x\times 2x}>7.879$，所以$x>26.28$，

又因为x为整数，故抽取的诺如病毒感染者至少有 27 人.

（2）设抗病毒口服液治疗有效的概率为p，每次试验花费为m，

则奥司他韦治疗有效的概率为$2p<1$，故$0<p<\frac{1}{2}$，

设抗病毒口服液试验总花费为X，X的可能取值为 4m，5m，6m，

$P(X=4m)=p^4$,

$P(X=5m)=2(p^2-p^4)$,

$P(X=6m)=(1-p^2)^2$

故 $E(X)=4mp^4+10m(p^2-p^4)+6m(p^4-2p^2+1)=-2mp^2+6m$

设奥司他韦试验总花费为 Y，Y 的可能取值为 3m，6m，

$P(Y=3m)=C_3^2(2p)^2(1-2p)+(2p)^3=12p^2-16p^3$,

$P(Y=6m)=1+16p^3-12p^2$,

所以 $E(Y)=48mp^3-36mp^2+6m$,

由 $0<p<\dfrac{1}{2}$ 所以 $E(Y)-E(X)=2mp^2(24p-17)<0$,

所以 $E(Y)<E(X)$，所以奥司他韦试试验平均花费较低.

22.（本小题满分 12 分）

（1）$h(x)=(x+1)\ln x-2(x-1)$

$h'(x)=(x+1)\dfrac{1}{x}+\ln x-2=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$

令 $H(X)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，$H'(x)=\dfrac{x-1}{x^2}$

$H(X)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，则 $H(X)\geq H(1)=0$，即 $h'(x)\geq 0$

所以，$h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 单调递增，$h_{\min}(x)=h(1)=0$

所以 h（x）的最小值为 0

（2）①要证明 $\varphi(x)=x^2\ln x$，可令 $G(x)=\varphi(x)-g(x)=x^2\ln x-x+1$，即证：$\mathrm{G}(\mathrm{x})\geq 0$

于是 $G'(x)=2x\ln x+x-1$

易知，当 $0<x<1$ 时 $G'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$G'(x)>0$

当 $x\in(0,1)$ 时，$G'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $G'(x)>0$

所以 $\mathrm{G}(\mathrm{x})$ 在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增

$G_{min}(x)=G(1)=0$ 所以 $G(x)\geq 0$，则 $\varphi(x)\geq g(x)$

②函数 $\varphi(x)=x^2\ln x$，$\varphi'(x)=x(2\ln x+1)$,

所以$\varphi(\mathrm{x})$在$\left(0,e^{-\frac{1}{2}}\right)$上单调递减，在$\left(e^{-\frac{1}{2}},+\infty\right)$上单调递增

不妨设$x_1<x_2$，$\varphi(1)=0$，$0<x_1<e_2^{-\frac{1}{2}}<x_2<1$，$m>0$

由（1）知，$\varphi(x)\geq x-1$，当且仅当$x=1$时取等号，

又求导易证$x\ln x\geq -\frac{1}{e}\cdot\varphi(x)\geq -\frac{1}{e}x$，当且仅当$x=\frac{1}{e}$时取等号，

设直线$y=m$与直线$y=-\frac{1}{e}x$，$y=x-1$交点的横坐标分别为x_1'，x_2'.

则$|x_1-x_2|<|x'_1-x'_2|=m+1+em=(e+1)m+1$

$\frac{e+1}{1-|x_1-x_2|}<-\frac{1}{m}$①

由对数平均不等式得，$\frac{x_1^2+x_2^2}{2}>\frac{x_1^2-x_2^2}{\ln x_1^2-\ln x_2^2}=\frac{x_1^2-x_2^2}{2\left(\frac{m}{x_1^2}-\frac{m}{x_2^2}\right)}=-\frac{x_1^2x_2^2}{2m}$

$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}>-\frac{1}{m}$②

综合①②可知：$\frac{1}{{x_1}^2}+\frac{1}{{x_2}^2}>\frac{e+1}{1-|x_1-x_2|}$.