青海省大通县教学研究室 2023 届高三第二次模拟考试・数学(文科)
参考答案、提示及评分细则

1. B　$M=\{x|2^x<8\}=\{x|x<3\}$，$N=\{x|x>-1\}$，则 $M\cap N=(-1,3)$. 故选 B.

2. C　由 $(2-\mathrm{i})z=\mathrm{i}$ 得 $z=\frac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\mathrm{i}$，则 $|z|=\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{2}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 C.

3. A　由折线图可知，月跑步里程不是逐月增加的，故 A 不正确；月跑步里程最大值出现在 10 月，故 B 正确；月跑步里程数从小到大排列分别是：2 月，8 月，3 月，4 月，1 月，5 月，7 月，6 月，11 月，9 月，10 月，故 5 月份对应的里程数为中位数，故 C 正确；1 月到 5 月的月跑步里程相对于 6 月至 11 月波动性更小，变化比较平稳，故 D 正确. 故选 A.

4. B　由题意，$f(1)=a+3$，$f(-1)=\frac{1}{2}$. 当 $a+3\geqslant 0$，即 $a\geqslant -3$ 时，$f(f(1))=f(a+3)=a+3(a+3)=4a+9=\frac{1}{2}$，解得 $a=-\frac{17}{8}$，满足题意；当 $a+3<0$，即 $a<-3$ 时，$f(f(1))=f(a+3)=2^{a+3}=\frac{1}{2}$，解得 $a=-4$，满足题意. 所以 $a=-\frac{17}{8}$ 或 -4. 故选 B.

5. A　设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q，所以 $q^2=\frac{a_3+a_6+a_9}{a_1+a_4+a_7}=\frac{32}{8}=4$，所以 $a_7+a_{10}+a_{13}=a_1q^6+a_4q^6+a_7q^6=8\times 4^3=512$. 故选 A.

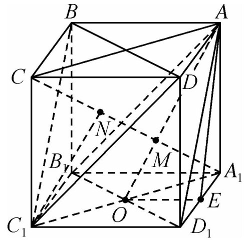
6. D　由题图可知 $f(x)$ 图象的一个对称中心是 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$，$f(x)$ 的最小正周期 $T=4\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=2\pi$，$f(x)$ 图象的对称中心为 $\left(k\pi+\frac{\pi}{6},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，结合选项可知，当 $k=-2$ 时，$f(x)$ 图象的一个对称中心是 $\left(-\frac{11\pi}{6},0\right)$. 故选 D.

7. B　从 2～8 的 7 个整数中随机取 2 个不同的数，共有 21 种不同的取法，若 2 个数的和恰为质数，不同的取法有：(2,3)，(2,5)，(3,4)，(3,8)，(4,7)，(5,6)，(5,8)，(6,7) 共 8 种，故所求概率 $P=\frac{8}{21}$. 故选 B.

8. D　当 $x<0$ 时，$y=f(-|x|)=f(x)$，其图象在 y 轴左侧的部分与题图 1 相同；当 $x>0$ 时，$y=f(-|x|)=f(-x)$，其图象在 y 轴右侧的部分与题图 1 y 轴左侧的图象关于 y 轴对称. 故选 D.

9. D　因为 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<\beta<0$，所以 $\frac{\pi}{4}+\alpha\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$，$\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，因为 $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{1}{3}$，$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{3}$，则 $\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)=\sin\left[\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\right]$

$=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$. 故选 D.



10. C　连结 A_1C_1, AC, 则 $A_1C_1 /\!/ AC$, ∴ A_1, C_1, A, C 四点共面, ∴ $A_1C \subset$ 平面 ACC_1A_1, ∵ $M \in A_1C$, ∴ $M \in$ 平面 ACC_1A_1, 又 $M \in$ 平面 AB_1D_1, ∴ M 在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上, 同理 A, O 也在平面 ACC_1A_1 与平面 AB_1D_1 的交线上. ∴ A, M, O 三点共线, 故 A 正确; 设直线 A_1C 与平面 BC_1D 的交点为 N, 易证平面 $AB_1D_1 /\!/$ 平面 C_1BD, 从而 $OM /\!/ C_1N$, 因为 O 为 A_1C_1 中点, 所以 M 为 A_1N 中点, 同理可得 N 为 CM 的中点, 所以 $A_1M=\frac{1}{3}A_1C=1$, 故 B 正确; 取 A_1D_1 中点 E, 连接 AE, OE, 因为平面 $ADD_1A_1 /\!/$ 平面 BCC_1B_1, 则 $\angle OAE$ 即为直线 AO 与平面 BCC_1B_1 所成角, $\tan\angle OAE=\frac{OE}{AE}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$, 故 C 错误; 因为 $A_1O=\frac{1}{2}A_1C_1$, $A_1M=\frac{1}{3}A_1C$, 所以 $S_{\triangle A_1OM}=\frac{1}{6}S_{\triangle A_1CC_1}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}A_1C_1\cdot CC_1=\frac{\sqrt{5}}{6}$, 故 D 正确. 故选 C.

11. B　对于 A, 因为 $f'(x)=3x^2-a$, 当 $a<0$ 时, $f'(x)=3x^2-a>0$ 恒成立, 所以此时不存在极值点, 故 A 正确; 对于 B, 因为 $f'(x)=3x^2-1$, 令 $f'(x)>0$ 得 $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$, 令 $f'(x)<0$ 得 $-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{极大值}=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2+\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$, $f(x)_{极小值}=f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2-\frac{2\sqrt{3}}{9}>0$, 所以函数 $f(x)$ 有且只有一个零点, 故 B 错误; 对于 C, 令 $h(x)=x^3-ax$, 该函数的定义域为 $\mathbf{R}$, $h(-x)=(-x)^3-a(-x)=-x^3+ax=-h(x)$, 则 $h(x)$ 是奇函数, $(0,0)$ 是 $h(x)$ 的对称中心, 将 $h(x)$ 的图象向上移动 2 个单位得到 $f(x)$ 的图象, 所以点 $(0,2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心, 故 C 正确; 对于 D, 设切点为 $(x_0, x_0^3-ax_0+2)$, $f'(x_0)=3x_0^2-a$, 故切线方程为 $y-(x_0^3-ax_0+2)=(3x_0^2-a)(x-x_0)$, 将 $(0,0)$ 代入得 $x_0=1$, 所以 $3-a=2$, 解得 $a=1$, 故 D 正确. 故选 B.

12. A　因为圆 E: $(x-2)^2+y^2=1$, 所以 $E(2,0)$, 易得 $E(2,0)$ 为 C 的焦点. 设 $P(x_0,y_0)(x_0\geqslant 0)$, 因为点 P 是抛物线 C: $y^2=8x$ 上的一点, 点 Q 是圆 E: $(x-2)^2+y^2=1$ 上的一点, 所以 $|PQ|\geqslant|PE|-1=x_0+2-1=x_0+1$, 又 $|PO|=\sqrt{x_0^2+y_0^2}=\sqrt{x_0^2+8x_0}$, 所以 $\frac{|PO|}{|PQ|}\leqslant\frac{\sqrt{x_0^2+8x_0}}{x_0+1}=\sqrt{\frac{x_0^2+8x_0}{(x_0+1)^2}}$, 令 $t=x_0+1$, 所以 $\sqrt{\frac{x_0^2+8x_0}{(x_0+1)^2}}=\sqrt{\frac{(t-1)^2+8(t-1)}{t^2}}=\sqrt{-7\left(\frac{1}{t}-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{16}{7}}$, 所以当 $\frac{1}{t}=\frac{3}{7}$, 即 $x_0=\frac{4}{3}$ 时, $\frac{|PO|}{|PQ|}$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{4\sqrt{7}}{7}$. 故选 A.

13. 4　由题知双曲线的焦点在 x 轴上, 因为一条渐近线方程为 $x+2y=0$, 所以 $\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{5-k}}{2}=\frac{1}{2}$, 解得 $k=4$.

14. -3　因为 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+3=1$, 所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-3$, 则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $|\boldsymbol{a}|\cos\theta=$

$\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-\sqrt{3}$.

15. 128π　因为母线长为 10 的圆锥的侧面展开图的圆心角等于 $\dfrac{8\pi}{5}$，所以侧面展开图的弧长为：$10\times\dfrac{8}{5}\pi=16\pi$.

设该圆锥的底面圆的半径为 r，所以 $2\pi r=16\pi$，解得 $r=8$，所以该圆锥的高 $h=\sqrt{10^2-8^2}=6$，所以该圆锥的体积 $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{1}{3}\pi\times 8^2\times 6=128\pi$.

16. 6　因为 $S_{12}=\dfrac{12(a_1+a_{12})}{2}=6(a_1+a_{12})=6(a_6+a_7)<0$，所以 $a_6+a_7<0$，又 $a_5+a_7=2a_6>0$，所以 $a_6>0$，所以 $a_7<0$，则 $(S_n)_{\max}=S_6$.

17. 解：(1) 由题意，$\bar{x}=\dfrac{20+15+13+3+2+(-5)+(-10)+(-18)}{8}=\dfrac{5}{2}$，……………… 2 分

$\bar{y}=\dfrac{6.5+3.5+3.5+1.5+0.5+(-0.5)+(-2.5)+(-3.5)}{8}=\dfrac{9}{8}$，……………… 4 分

$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{8}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{8}x_i^2-n\bar{x}^2}=\dfrac{324-8\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{9}{8}}{1\,256-8\times\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{4}$，……………… 6 分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=\dfrac{9}{8}-\dfrac{1}{4}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{1}{2}$，故线性回归方程为 $\hat{y}=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$. ……………… 8 分

(2) 由题意，设高度为 128 cm 的这种树苗的树干最大直径为 ω，则直径偏差为 $\omega-31.5$，而高度偏差为 $128-120=8$，……………… 10 分

所以 $\omega-31.5=\dfrac{1}{4}\times 8+\dfrac{1}{2}$，解得 $\omega=34$，

所以可以预测这株树苗的树干最大直径为 34 mm. ……………… 12 分

18. 解：(1) 因为 $\sqrt{3}b\sin C=c\cos B+c$，由正弦定理得 $\sqrt{3}\sin B\sin C=\sin C\cos B+\sin C$，

又 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，

所以 $\sqrt{3}\sin B=\cos B+1$，即 $\sin\left(B-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，

所以 $B-\dfrac{\pi}{6}\in\left(-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$，所以 $B-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. ……………… 5 分

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}=\dfrac{3}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，

所以 $AB=2\sqrt{3}\sin C=2\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)$. ……………… 7 分

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cos A=\left[2\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)\right]^2+1-2\times 2\sqrt{3}\sin\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)\cos A=12\times\dfrac{1-\cos 2\left(A+\dfrac{\pi}{3}\right)}{2}+1-4\sqrt{3}\left(\dfrac{1}{2}\sin A+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A\right)\cos A=7-6\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2A\right.$

$-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A\Big)-4\sqrt{3}\Big(\frac{1}{4}\sin 2A+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1+\cos 2A}{2}\Big)=4+2\sqrt{3}\sin 2A$,………………………………… 10 分

所以 $(BD^2)_{\max}=4+2\sqrt{3}$,此时 $\sin 2A=1$,………………………………… 11 分

所以 $BD_{\max}=1+\sqrt{3}$,即线段 BD 的最大值为 $1+\sqrt{3}$.………………………………… 12 分

19. (1)证明:取 BC 的中点 G,连接 AG,DG,FG,

因为 $AD/\!/BC$,$BC=2AD$,所以 $AD/\!/CG$,$AD=CG$,

所以四边形 $AGCD$ 为平行四边形,所以 $AG/\!/CD$,$AG=CD$,

同理 $DG/\!/AB$.………………………………… 2 分

因为 $AB\subset$平面 ABE,$DG\not\subset$平面 ABE,所以 $DG/\!/$平面 ABE,

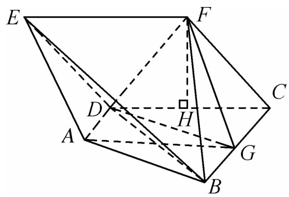
又 $EF/\!/CD$,$EF=CD$,所以 $AG/\!/EF$,$AG=EF$,

所以四边形 $AGFE$ 为平行四边形,所以 $AE/\!/FG$,

因为 $AE\subset$平面 ABE,$FG\not\subset$平面 ABE,所以 $FG/\!/$平面 ABE,………………………………… 4 分

又 $DG,FG\subset$平面 DFG,且 $DG\cap FG=G$,所以平面 $DFG/\!/$平面 ABE,

因为 $DF\subset$平面 DFG,故 DF 与平面 ABE 无公共点,所以 $DF/\!/$平面 ABE.………………………………… 6 分



(2)解:因为 $EF/\!/CD$,$EF\not\subset$平面 $ABCD$,$CD\subset$平面 $ABCD$,

所以 $EF/\!/$平面 $ABCD$,即 $EF/\!/$平面 ABD,所以点 E 到平面 ABD 的距离等于点 F 到平面 ABD 的距离.………………………………… 7 分

作 $FH\perp CD$,垂足为 H,因为平面 $CDEF\perp$平面 $ABCD$,平面 $CDEF\cap$平面 $ABCD=CD$,$FH\subset$平面 $CDEF$,

所以 $FH\perp$平面 $ABCD$,所以 FH 的长为点 F 到平面 ABD 的距离.………………………………… 9 分

因为$\angle FCD=\frac{\pi}{3}$,$CF=DE=2$,所以 $FH=\sqrt{3}$,………………………………… 10 分

所以 $V_{B-ADE}=V_{E-ABD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\times 2\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.………………………………… 12 分

20. 解:(1)设 $M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,则 $H\Big(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\Big)$,直线 OH 的斜率 $k_{OH}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=-\frac{1}{2}$.… 1 分

因为 M,N 在椭圆 C 上,所以$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$,$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$,

两式相减得$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2}=0$,即$\frac{1}{a^2}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{b^2(x_1+x_2)(x_1-x_2)}=0$,……… 3 分

又 $k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=1$,所以$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{2b^2}=0$,即 $a^2=2b^2$.………………………………… 4 分

又因为椭圆 C 过点$\Big(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\Big)$,所以$\frac{1}{a^2}+\frac{3}{2b^2}=1$,解得 $a^2=4$,$b^2=2$,

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.………………………………… 5 分

(2)联立$\begin{cases} y=kx+2, \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$消 y 整理得:$(2k^2+1)x^2+8kx+4=0$.

因为直线与椭圆交于 A,B 两点,故 $\Delta>0$,解得 $k^2>\dfrac{1}{2}$. ························ 6 分

设 $A(x_3,y_3)$,$B(x_4,y_4)$,则 $x_3+x_4=\dfrac{-8k}{2k^2+1}$,$x_3x_4=\dfrac{4}{2k^2+1}$.

设 AB 中点 $G(x_0,y_0)$,则 $x_0=\dfrac{x_3+x_4}{2}=\dfrac{-4k}{2k^2+1}$,$y_0=kx_0+2=\dfrac{2}{2k^2+1}$,故 $G\left(\dfrac{-4k}{2k^2+1},\dfrac{2}{2k^2+1}\right)$. ········ 7 分

假设存在 k 和点 $P(m,0)$,使得$\triangle PAB$是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形,则 $PG\perp AB$,故 $k_{PG}\cdot k_{AB}=-1$,

所以$\dfrac{\frac{2}{2k^2+1}}{\frac{-4k}{2k^2+1}-m}\times k=-1$,解得 $m=\dfrac{-2k}{2k^2+1}$,故 $P(\dfrac{-2k}{2k^2+1},0)$. ························ 8 分

又因为$\angle APB=\dfrac{\pi}{2}$,所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$,

所以$(x_3-m,y_3)\cdot(x_4-m,y_4)=0$,即$(x_3-m)(x_4-m)+y_3y_4=0$,

整理得$(k^2+1)x_3x_4+(2k-m)(x_3+x_4)+m^2+4=0$.

所以$(k^2+1)\cdot\dfrac{4}{2k^2+1}-(2k-m)\cdot\dfrac{8k}{2k^2+1}+m^2+4=0$, ························ 10 分

代入 $m=\dfrac{-2k}{2k^2+1}$,整理得 $k^4=1$,即 $k^2=1$,所以 $k=1$ 或 $k=-1$.

即存在 k 使得$\triangle PAB$是以 P 为顶点的等腰直角三角形. ························ 11 分

当 $k=-1$ 时,P 点坐标为$\left(\dfrac{2}{3},0\right)$;当 $k=1$ 时,P 点坐标为$\left(-\dfrac{2}{3},0\right)$.

此时,$\triangle PAB$是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形. ························ 12 分

21.(1)解:$f'(x)=ae^x-\dfrac{1}{x}$,因为 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增, ························ 1 分

所以对$\forall x\in[1,+\infty)$,$f'(x)\geqslant0$,即 $ae^x-\dfrac{1}{x}\geqslant0$ 恒成立,

所以 $a\geqslant\dfrac{1}{xe^x}$在$[1,+\infty)$上恒成立. ························ 2 分

令 $g(x)=\dfrac{1}{xe^x}$,则 $g'(x)=-\dfrac{x+1}{x^2e^x}<0$ 在$[1,+\infty)$上恒成立,所以 $g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递减,

························ 3 分

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=\dfrac{1}{e}$,所以 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$,即 a 的取值范围为$\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$. ························ 4 分

(2)证明:当 $a\geqslant\dfrac{1}{e^2}$时,$f(x)=ae^x-\ln x\geqslant\dfrac{e^x}{e^2}-\ln x$,所以只要证 $e^x-e^2\ln x>0$. ························ 5 分

令 $h(x)=e^x-e^2\ln x$,则 $h'(x)=e^x-\dfrac{e^2}{x}(x>0)$,显然 $h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,

因为 $h'(1)=\mathrm{e}-\mathrm{e}^2<0, h'(2)=\mathrm{e}^2-\frac{\mathrm{e}^2}{2}=\frac{\mathrm{e}^2}{2}>0$，故存在 $x_0\in(1,2)$，使得 $h'(x_0)=0$，

即 $\mathrm{e}^{x_0}-\frac{\mathrm{e}^2}{x_0}=0$，所以 $\mathrm{e}^{x_0}=\frac{\mathrm{e}^2}{x_0}$，$\ln x_0=2-x_0$. ………………………………………… 7 分

由 $h'(x)$ 的单调性知：当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $h(x)_{\min}=h(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-\mathrm{e}^2\ln x_0=\frac{\mathrm{e}^2}{x_0}+\mathrm{e}^2(x_0-2)=\frac{\mathrm{e}^2}{x_0}+\mathrm{e}^2x_0-2\mathrm{e}^2\geqslant 2\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^2=0$，

当且仅当 $\frac{\mathrm{e}^2}{x_0}=\mathrm{e}^2x_0$，即 $x_0=1$ 时等号成立，

又 $x_0\in(1,2)$，所以上式等号不成立，所以 $h(x)_{\min}>0$，

所以 $h(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^2\ln x>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

所以当 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ 时，$f(x)>0$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) 由 $\rho=2\cos\theta$，得 $\rho^2=2\rho\cos\theta$，将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入得，$x^2+y^2=2x$，

所以 C 的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$. ………………………………………… 4 分

(2) 因为直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=5+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\sqrt{3}+\frac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)，

所以 $M(5,\sqrt{3})$ 在 l 上，把 l 的参数方程代入 $(x-1)^2+y^2=1$，得 $t^2+5\sqrt{3}t+18=0$，

设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2，所以 $\Delta=(5\sqrt{3})^2-4\times 18=3>0$，

所以 $t_1+t_2=-5\sqrt{3}$，$t_1t_2=18>0$，所以 $t_1<0,t_2<0$，………………………………………… 6 分

故 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA|\cdot|MB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{|t_1+t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{5\sqrt{3}}{18}$. ………………………………………… 10 分

23. 解：(1) 当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=3x+1$，由 $f(x)=3x+1\geqslant 7\Rightarrow x\geqslant 2$，所以 $x\geqslant 2$；

当 $-1<x<1$ 时，$f(x)=3+x$，由 $f(x)=3+x\geqslant 7\Rightarrow x\geqslant 4$，$x\in\varnothing$；

当 $x\leqslant -1$ 时，$f(x)=-3x-1$，由 $f(x)=-3x-1\geqslant 7\Rightarrow x\leqslant-\frac{8}{3}$，所以 $x\leqslant-\frac{8}{3}$.

综上，$f(x)\geqslant 7$ 的解集为 $\left(-\infty,-\frac{8}{3}\right]\cup[2,+\infty)$. ………………………………………… 5 分

(2) $f(x)+|x-1|=|2x+2|+2|x-1|=2(|x+1|+|x-1|)\geqslant 2|1-(-1)|=4$. ………………………… 7 分

故 $a^2+b^2\leqslant 4$ 恒成立，

又 $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab\leqslant 2(a^2+b^2)\leqslant 8$，当且仅当 $a=b=\sqrt{2}$ 时，取等号，故 $a+b$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

………………………………………………………………………… 10 分