

4. 若 $\cos \alpha - \sin \alpha = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\tan^2\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} =$

- A. $-\frac{21}{4}$ B. $\frac{21}{4}$ C. $-\frac{21}{8}$ D. $\frac{21}{8}$

5. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \sqrt{x}, & x > 0, \\ ax^2 + 2ax + 3, & x \leq 0 \end{cases}$ 有且仅有 3 个零点 α, β, γ , 若 $\alpha < \beta < \gamma$, 则

- A. $\ln \alpha \beta = \gamma$ B. $\ln \alpha \beta = \gamma - 1$ C. $\ln \alpha \beta < \gamma - 1$ D. $\ln \alpha \beta < \gamma$

6. 若 $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^n$ 的展开式中项的次数为整数的有且仅有 5 项, 则其常数项为

- A. 第 8 项 B. 第 7 项 C. 第 6 项 D. 第 5 项

7. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且 $f(-2x) + f(2x) = 0, f(1-2x) - f(1+2x) = -4x$, 则 $f(10) + f'(11) =$

- A. 11 B. 9 C. 0 D. -9

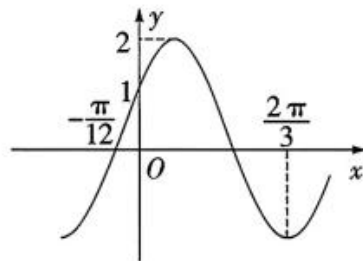
8. 已知三棱锥 $S-ABC$ 的底面 ABC 是等边三角形, 平面 $SAC \perp$ 平面 $ABC, SA = SC, \angle ASC = 90^\circ, M$ 为 SB 上一点, 且 $AM \perp BC$. 设三棱锥 $S-ABC$ 外接球球心为 O , 则

- A. 直线 $OM \perp$ 平面 $SAC, OA \perp SB$
 B. 直线 $OM //$ 平面 $SAC, OA \perp SB$
 C. 直线 $OM \perp$ 平面 $SAC, \text{平面 } OAM \perp \text{平面 } SBC$
 D. 直线 $OM //$ 平面 $SAC, \text{平面 } OAM \perp \text{平面 } SBC$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 如图是函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象, 则

- A. $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
 B. $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{5\pi}{6}, \frac{4\pi}{3}\right]$ 单调递增
 C. 直线 $x = -\frac{\pi}{3}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称轴



D. $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位得到函数 $g(x) = 2\sin 2x$ 的图象

10. 已知函数 $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x^2}$, 则
- A. $f(x)$ 为偶函数
- B. $f(x)$ 的最小值为 $\frac{e^2}{4}$
- C. 函数 $g(x) = f(x) - a$ ($a > \frac{e^2}{4}$) 有两个零点
- D. 直线 $ex + y - 2e = 0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线
11. 已知 CD 是圆柱 OO_1 下底面圆 O_1 的直径, 等腰梯形 $ABCD$ 内接于圆 O_1 , 且 $2AD = CD = OO_1 = 4$, 若点 Q 为上底面圆 O 内(含边界)一点, 则
- A. $\triangle ABQ$ 的周长为定值
- B. 三棱锥 $A-BCQ$ 的体积为定值
- C. 三棱锥 $O-ACO_1$ 外接球的表面积为 60π
- D. 直线 AQ 与平面 ACO_1 所成角的最小值为 45°
12. 已知直线 $y = kx + m$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于点 M, N , 若过点 M 和 $A(2, 0)$ 的直线与 y 轴交于点 C , 过点 M 和 $B(0, 2)$ 的直线与 x 轴交于点 D , 则
- A. $\triangle MON$ 面积的最大值为 2
- B. $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ 的最小值为 4
- C. $|AD| \cdot |BC| = 8$
- D. 若 $k = 1$, 则 $k_{OM} \cdot k_{ON} = 1$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 甲、乙、丙 3 名同学在《将相和》《沙家浜》《红灯记》中选择一个观看, 若甲单独选择一个剧目观看, 则甲、乙、丙 3 名同学观看的剧目各不相同的概率为 _____
14. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 $A(0, 0), B(-4, 4), D(2, 6)$. 若 AC 与 BD 的交点为 M , 则 DM 的中点 E 的坐标为 _____
15. 已知直线 l 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 交于点 M, N , 且 $OM \perp ON$. 若 $\triangle MON$ 的面积为 S , 写出一个满足“ $16 \leq S \leq 32$ ”的直线 l 的方程 _____.
16. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 且满足 $f(x) = f(-x) - 2x, x > 0$ 时, $f'(x) + 1 > 0$. 若不等式 $f(x + \ln a) > f(x) - \ln a$ 在 $[-2, +\infty)$ 上恒成立, 则 a 的取值范围是 _____.

四、解答题:本题共6小题,共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos x \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最值;

(2) 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $f(A) = 2, b = 2$, 且 $2\sin B + \sin C = \sqrt{7} \sin A$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 2, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 2, b_2 = 3, a_n b_{n+1} - a_n = 2^n b_n$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为数列 $\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}$ 的前 n 项和, 证明: $1 \leq S_n < 3$.

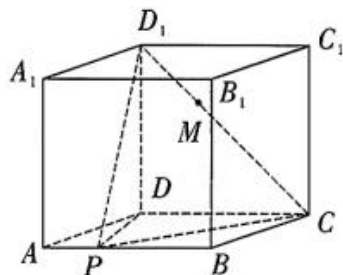
19. (12分)

如图,直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle DAB = \frac{\pi}{3}$, $3AD =$

$2CD = 2DD_1 = 6$, 点 P, M 分别为 AB, CD_1 上靠近 A, D_1 的三等分点.

(1) 求点 M 到直线 PD_1 的距离; 来源: 高三答案公众号

(2) 求直线 PD 与平面 PCD_1 所成角的正弦值.



20. (12分)

某乡政府为提高当地农民收入, 指导农民种植药材, 并在种植药材的土地附近种草放牧, 发展畜牧业. 牛粪、羊粪等有机肥可以促进药材的生长, 发展生态循环农业. 下图所示为某农户近7年种植药材的平均收入 y (单位: 千元) 与年份代码 x 的折线图.

并计算得到 $\sum_{i=1}^7 y_i = 480$, $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 2052$, $\sqrt{\sum_{i=1}^7 (y_i - \bar{y})^2} \approx 25$, $\sum_{i=1}^7 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) =$

132 , $\sum_{i=1}^7 w_i = 140$, $\sum_{i=1}^7 (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y}) = 1048$, $\sqrt{\sum_{i=1}^7 (w_i - \bar{w})^2} \approx 43.3$, 其中 $w_i = x_i^2$.

(1) 根据折线图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + dx^2$ 哪一个适宜作为平均收入 y 关于年份代码 x 的回归方程类型? 并说明理由;

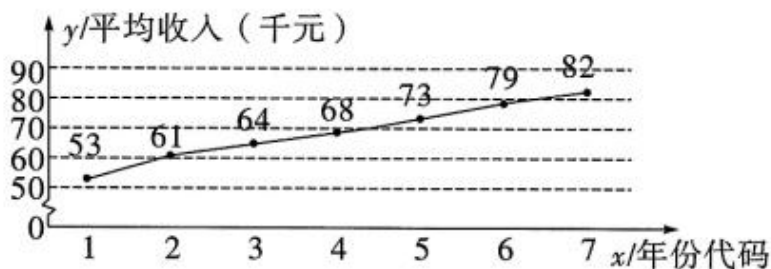
数学试题·白卷 第5页(共8页)

(2) 根据(1)的判断结果及数据,建立 y 关于 x 的回归方程,并预测 2023 年该农户种植药材的平均收入;

(3) 结合当地的环境和气候及对种植户的调查统计分析表明:若继续种植现有的药材,农户的收入将接近“瓶颈”.要想继续提高农户的收入,则需要制定新的种植方案.在原有的土地上继续种植原有药材,质量得不到保障,且影响农户经济收入.请先分析原因,并给出建议.

附:相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, 回归直线的斜率和截距的最小二乘法估

计公式分别为: $b = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$, $\sqrt{7} \approx 2.65$.



注:年份代码 1-7 分别对应年份 2016-2022



21. (12分)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - a \ln x$.

(1) 当 $a > 0$ 时,证明: $f(x)$ 存在唯一的极小值点;

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点,求 a 的取值范围.



22. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 在 C 上, 当 $AF_1 \perp x$

轴时, $|AF_1| = \frac{1}{2}$; 当 $|AF_1| = 2$ 时, $\angle F_1AF_2 = \frac{2\pi}{3}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知斜率为 -1 的直线 l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 与直线 $x=1$ 交于点 Q , 且点 M, N 在直线 $x=1$ 的两侧, 点 $P(1, t) (t > 0)$. 若 $|MP| \cdot |NQ| = |MQ| \cdot |NP|$, 是否存在到直线 l 的距离 $d = \sqrt{2}$ 的 P 点? 若存在, 求 t 的值; 若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: www.zizzs.com) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注**自主选拔在线**官方微信号: **zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线