

沈阳市第 120 中学 2022-2023 学年度下学期

高一年级第三次质量监测

数学试题

满分：150 分 时间：120 分钟 命题人：马媛 艾宣伯 审题人：孙爽

一、单选题（本大题共 8 小题，共 40 分。在每题列出的选项中，选出符合题目的一项）

1. 已知角 α 的顶点为原点，始边为 x 轴的非负半轴，若其终边经过点 $P(-2, \sqrt{5})$ ，则

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2 \alpha + 1} = (\quad)$$

- A. $-\frac{7\sqrt{5}}{2}$ B. $-\frac{4\sqrt{5}}{13}$ C. $-\frac{13\sqrt{5}}{4}$ D. $-\frac{2\sqrt{5}}{7}$

2. 已知复数 z 满足 $z(3+i)=3+i^{2020}$ ，其中 i 为虚数单位，则 z 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为 ()

- A. $-\frac{2}{5}i$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{2i}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

3. 一个用斜二测画法画出来三角形是一个边长为 a 的正三角形，则原三角形面积是 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^2$ D. $\sqrt{6}a^2$

4. 以下命题正确的是 ()

- A. 直角三角形绕其一边所在直线旋转得到的旋转体是圆锥
B. 夹在圆柱的两个平行截面间的几何体还是圆柱
C. 圆锥截去一个小圆锥后剩余部分是圆台
D. 棱锥截去一个小棱锥后剩余部分是棱台

5. 已知 α 为第二象限角， $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{5}$ ，则 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = (\quad)$

- A. $\frac{3\sqrt{2}-3\sqrt{6}}{10}$ B. $\frac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{5}$ C. $\frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{10}$

6. “不以规矩，不成方圆”.出自《孟子·离娄章句上》.“规”指圆规，“矩”指由相互垂直的长短两条直尺构成的角尺，用来测量、画圆和方形图案的工具.有一圆形木板，以“矩”量之，较长边为 10cm，较短边为 5cm，如图所示，将这个圆形木板截出一块三角形木板，三角形定点 A, B, C 都在圆周上，角 A, B, C 分别对应 a, b, c ，满足 $c = 4\sqrt{5}$ cm. 若 $S_{\triangle ABC} = 8 \text{ cm}^2$ ，且 $a > c$ ，则 ()



- A. $\sin C = \frac{3}{5}$ B. $\triangle ABC$ 周长为 $12 + 4\sqrt{5}$ cm
C. $\triangle ABC$ 周长为 $15 + 4\sqrt{5}$ cm D. 圆形木板的半径为 $2\sqrt{5}$ cm

试卷第 1 页，共 6 页

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 在区间 $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调, 且 $f(\frac{\pi}{2}) = -$

$f(\frac{\pi}{6}) = f(\frac{2\pi}{3})$, 当 $x = \frac{\pi}{12}$ 时, $f(x)$ 取得最大值, 则不等式 $f(x) > 1$ 的解集为 ()

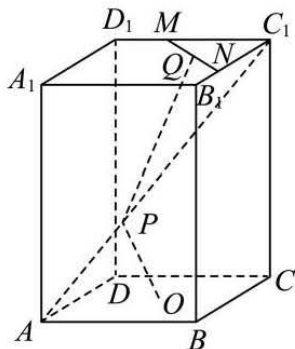
A. $(-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$

B. $(\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$

C. $(-\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$

D. $(\frac{\pi}{12} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi) (k \in \mathbb{Z})$

8. 如图所示, 已知正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的上下底面的边长为 3, 高为 4, 点 M, N 分别在线段 D_1C_1 和 B_1C_1 上, 且满足 $MC_1 = NC_1 = 2$, 下底面 $ABCD$ 的中心为点 O , 点 P, Q 分别为线段 AC_1 和 MN 上的动点, 则 $PQ + PO$ 的最小值为 ()



A. $\frac{\sqrt{66}}{2}$

B. $2\sqrt{6}$

C. $\frac{\sqrt{33}}{2}$

D. $2\sqrt{3}$

二、多选题 (本大题共 4 小题, 共 20 分。在每小题有多项符合题目要求)

9. 下列说法正确的是 ()

A. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 共线是 A, B, C, D 四点共线的必要不充分条件

B. 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则存在唯一实数 λ 使得 $\vec{b} = \lambda \vec{a}$

C. 已知 $\vec{a} = (1, 3), \vec{b} = (1, 1)$, 则 $\vec{a}$ 与 $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ 的夹角为锐角的充要条件是 $\lambda \in (-\frac{5}{2}, +\infty)$

D. 在 $\triangle ABC$ 中, D 为 BC 的中点, 若 $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} = \lambda \overrightarrow{AD}$, 则 $\overrightarrow{BD}$ 是 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影向量

10. 已知直线 a, b, c 两两异面, 且 $a \perp c, b \perp c$, 下列说法正确的是 ()

A. 存在平面 α, β , 使 $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 且 $c \perp \alpha, c \perp \beta$

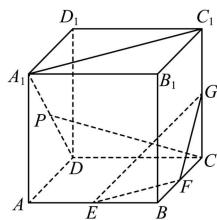
B. 存在平面 α, β , 使 $a \subset \alpha, b \subset \beta$, 且 $c \parallel \alpha, c \parallel \beta$

C. 存在平面 γ , 使 $a \parallel \gamma, b \parallel \gamma$, 且 $c \perp \gamma$

D. 存在唯一的平面 γ , 使 $c \subset \gamma$, 且 a, b 与 γ 所成角相等

试卷第 2 页, 共 6 页

11. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G 分别为 AB, BC, CC_1 的中点, 点 P 在线段 A_1D 上, 则下列结论正确的是 ()



- A. 直线 $A_1C_1 \parallel$ 平面 EFG B. 直线 CP 和平面 $ABCD$ 所成的角为定值
C. 异面直线 CP 和 FG 所成角不为定值
D. 若直线 $CP \parallel$ 平面 EFG , 则点 P 为线段 A_1D 中点

12. 已知三棱锥 $P - ABC$ 所有棱长均为 2, $PO \perp$ 平面 ABC , O 为垂足, D 是 PO 中点, AD 延长线交平面 PBC 于点 A_1 , CD 延长线交平面 PAB 于点 C_1 , 则下列结论正确的是 ()

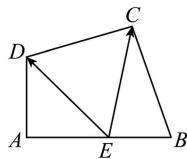
- A. $A_1C_1 \parallel AC$
B. 若 Q 是棱 PB 上的动点, 则 $|AQ| + |CQ|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}$
C. 三棱锥 $D - ABC$ 外接球的表面积为 6π
D. $V_{P-A_1BC_1} = \frac{1}{25} V_{P-ABC}$

三、填空题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

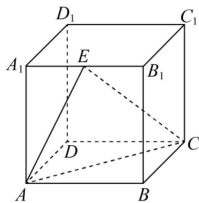
13. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$), 若 $x_1 = \frac{\pi}{12}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 的两个零点, 则当 ω 取得最小值时, $\sin 4\varphi =$ _____.

14. 已知圆锥侧面展开图为半圆, 则该圆锥的侧面积与其内切球的表面积之比为 _____.

15. 在平面四边形 $ABCD$ 中 (如图所示), $AB \perp AD, BC \perp CD, \angle ABC = \frac{\pi}{3}, AD = CD = 2$, 若点 E 为边 AB 上的动点, 则 $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{ED}$ 的最小值为 _____;



16. 如图, 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E 是 A_1B_1 的中点, 平面 ACE 将正方体分成体积分别为 V_1, V_2 ($V_1 \leq V_2$) 的两部分, 则 $\frac{V_1}{V_2} =$ _____



四、解答题（本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17. （本题 10 分）已知复数 $z_0 = (a^2 - 4a + 3) + (a^2 - 3a + 2)i$ (i 为虚数单位, $a \in \mathbb{R}$) 为纯虚数, z_0 和实数 b 是关于 x 的方程 $x^2 - (3 + 2i)x + 6i = 0$ 的两个根.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 若复数 z 满足 $|z| = |a + bi|$, 说明在复平面内 z 对应的点 Z 的集合是什么图形? 并求该图形的面积.

18. （本题 12 分）在 $\triangle ABC$ 中, $\sqrt{3}\sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(B + \frac{\pi}{6}\right)$.

(1) 求 B 的值;

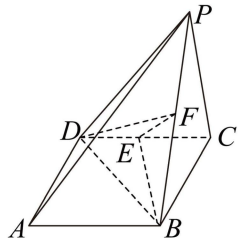
(2) 给出以下三个条件: ① $a^2 - b^2 + c^2 + 3c = 0$; ② $a = \sqrt{3}, b = 1$; ③ $S_{\triangle ABC} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$,

若这三个条件中仅有两个正确, 请选出正确的条件并回答下面问题:

(i) 求 $\sin A$ 的值;

(ii) 求 $\angle ABC$ 的角平分线 BD 的长.

19. （本题 12 分）如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是平行四边形, E, F 分别是 CD, PB 的中点.



(1) 证明: $EF \parallel$ 平面 PAD .

(2) 若四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 32, $\triangle DEF$ 的面积为 4, 求 B 到平面 DEF 的距离.

20. (本题 12 分) 桌状山是一种山顶水平如书桌, 四面绝壁临空的地质奇观. 位于我国四川的瓦屋山是世界第二大的桌状山, 其与峨眉山并称蜀中二绝. 苏轼曾有诗云: “瓦屋寒堆春后雪, 峨眉翠扫雨余天”. 某地有一座类似瓦屋山的桌状山可以简化看作如图 1 所示的圆台, 图中 AB 为圆台上底面的一条东西方向上的直径, 某人从 M 点出发沿一条东西方向上的笔直公路自东向西以 $30\sqrt{3}\text{km/h}$ 的速度前进, 6 分钟后到达 N 点. 在 M 点时测得 A 点位于北偏西 45° 方向上, B 点位于北偏西 15° 方向上; 在 N 点时测得 A 点位于北偏东 15° 方向上, B 点位于北偏东 45° 方向上, 且在 N 点时观测 A 的仰角的正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{15}$. 设 A 点在地表水平面上的正投影为 A' , B 点在地表水平面上的正投影为 B' , B' , M , N 在地表水平面上的分布如图 2 所示.

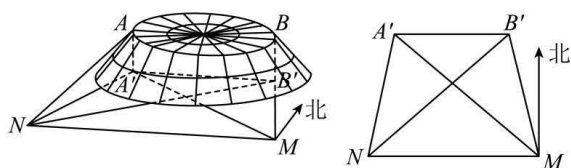


图1

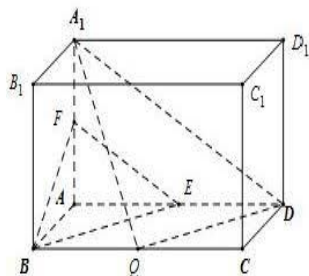
图2

- (1) 该山的高度为多少千米?
- (2) 已知该山的下底面圆的半径为 1.8km , 当该山被冰雪完全覆盖时, 冰雪的覆盖面积为多少平方千米?

21. (本题 12 分) 已知函数 $f(x) = 2\sin^2(\omega x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{3}\cos(2\omega x) - 1$ ($\omega > 0$), $f(x)$ 的最小正周期为 π .

- (1) 方程 $f(x) - n + 1 = 0$ 在 $[0, \frac{7\pi}{12}]$ 上有且只有一个解, 求实数 n 的取值范围;
- (2) 是否存在实数 m 满足对任意 $x_1 \in [-1, 1]$, 都存在 $x_2 \in \mathbb{R}$, 使得 $4^{x_1} + 4^{-x_1} + m(2^{x_1} - 2^{-x_1}) + 2 > f(x_2)$ 成立? 若存在, 求实数 m 的取值范围; 若不存在, 说明理由.

22. (本题 12 分) 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 1, AD = 2, E, F$ 分别为 AD, AA_1 的中点, Q 是 BC 上一个动点, 且 $BQ = \lambda QC (\lambda > 0)$.



- (1) 当 $\lambda = 1$ 时, 求证: 平面 $BEF \parallel$ 平面 A_1DQ ;
- (2) 是否存在 λ , 使得 $BD \perp FQ$? 若存在, 请求出 λ 的值; 若不存在, 请说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线