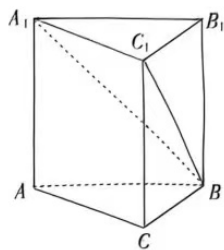


6. 在《九章算术》中记载, 堑堵是底面为直角三角形的直三棱柱, 阳马指底面为矩形, 一侧棱垂直于底面的四棱锥, 鳖臑为四个面都为直角三角形的三棱锥. 如图, 在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$,

$AA_1=2$, 鳖臑 $B_1-A_1C_1B$ 的外接球的体积为 $\frac{8\sqrt{2}}{3}\pi$, 则阳马 $B-ACC_1A_1$ 体积的最大值为

- A. $\frac{2}{3}$
B. $\frac{4}{3}$
C. $\frac{8}{3}$
D. 4



7. 已知在三角形 ABC 中, $AB=3, AC=2, \angle A=60^\circ$, 点 M, N 分别为边 AB, AC 上的动点, $\vec{AM}=x\vec{AB}, \vec{AN}=y\vec{AC}$, 其中 $x, y > 0, x+y=1$, 点 P, Q 分别为 MN, BC 的中点, 则 $|PQ|$ 的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{21}}{14}$ B. $\frac{3\sqrt{21}}{14}$ C. $\frac{\sqrt{19}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{19}}{2}$

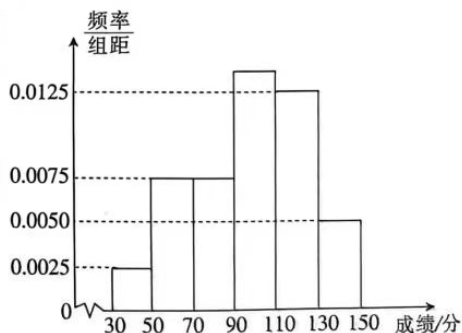
8. 已知 $a=2, b=2 \cdot 1^{0.9}, c=1 \cdot 9^{1.1}$, 且 $\frac{11}{19} + \ln \frac{10}{19} < 0$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $c > a > b$ B. $b > a > c$ C. $a > b > c$ D. $b > c > a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

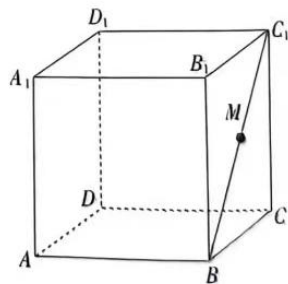
9. 用分层随机抽样法从某校高一年级学生的数学竞赛成绩(满分 150 分)中抽取一个容量为 120 的样本, 其中男生成绩的数据有 80 个, 女生成绩的数据有 40 个, 将这 80 个男生的成绩分为 6 组, 绘制得到如图所示的频率分布直方图, 下列说法正确的是

- A. 男生成绩的样本数据在 $[90, 110)$ 内的频率为 0.015
B. 男生成绩的样本数据的平均数为 97
C. 男生成绩的样本数据的第 75 百分位数为 118
D. 女生成绩的样本数据的平均数为 91, 则总样本的平均数为 95



10. 如图, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 若点 M 在线段 BC_1 上运动, 则下列结论正确的为

- A. 三棱锥 $M-ACD_1$ 的体积为定值
B. 直线 DM 与平面 BCC_1B_1 所成角的最大值为 $\frac{\pi}{3}$
C. $AM \perp A_1D$
D. 点 M 到平面 CDD_1 与到平面 ACD 的距离之和为定值



11. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 准线与 x 轴的交点为 M , 过点 F 的直线 l 与抛物线 C 相交于 A, B 两点(点 A 在第一象限), 过 A, B 点作准线的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 . 设直线 l 的倾斜角为 θ , 当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时, $|AB| = 16$. 则下列说法正确的是
- A. $\angle AMB$ 有可能为直角
- B. $|MF| |A_1 B_1| = |FA_1| |FB_1|$
- C. Q 为抛物线 C 上一个动点, $E(3, 1)$ 为定点, $||QE| - |QF||$ 的最小值为 $\sqrt{5}$
- D. 过 F 点作倾斜角的角平分线 FP 交抛物线 C 于 P 点(点 P 在第一象限), 则存在 θ , 使 $\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|PF|} = 1$
12. 已知连续函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 \mathbf{R} , 记 $g(x) = f'(x)$, 若 $g'(\frac{3}{2} - \frac{2}{3}x)$ 为奇函数, $f(\frac{3}{4} + 2x) - 2x$ 的图象关于 y 轴对称, 则
- A. $g'(3) = 0$
- B. $g(\frac{3}{4}) = g'(\frac{3}{2})$
- C. $g'(x)$ 在 $(0, 4)$ 上至少有 2 个零点
- D. $\sum_{k=1}^{2024} [g(\frac{3}{4}k) + g'(\frac{3}{4}k)] = 3036$

非选择题部分(共 90 分)

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 在 $(2x - \frac{1}{x})^6$ 的展开式中, x^2 的系数为 \blacktriangle .
14. 已知直线 $l: mx - y + 2m = 0$ 与曲线 $C: y = 2 - \sqrt{4 - x^2}$ 有两个交点, 则 m 的取值范围为 \blacktriangle .
15. 已知函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2})$, $f(x) \leq |f(\frac{\pi}{6})|$, $f(x) + f(\frac{4\pi}{3} - x) = 0$, $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{36}, \frac{\pi}{6})$ 上单调, 则正整数 ω 的最大值为 \blacktriangle .
16. $\forall a, b \in \mathbf{R}, \frac{4 \ln x + 3}{4x} \leq \frac{3}{4x} + a + \frac{b}{x} \leq x$, 则 b 的最大值是 \blacktriangle .

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知 $a_1 = 1$, $\{a_n + 1\}$ 是公比为 2 的等比数列, $\{b_n\}$ 为正项数列, $b_1 = 1$, 当 $n \geq 2$ 时, $(2n - 3)b_n = (2n - 1)b_{n-1}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 $c_n = a_n \cdot b_n$. 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分)

已知锐角 $\triangle ABC$, a, b, c 分别是角 A, B, C 的对边, 且 $2a\cos C = b - a$.

(1) 证明: $C = 2A$;

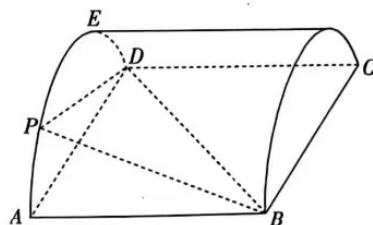
(2) 若 CD 为 $\angle ACB$ 的角平分线, 交 AB 于 D 点, 且 $CD = \sqrt{3}$, $S_{\triangle ACD} = \sqrt{2}$. 求 a 的值.

19. (12分)

如图所示的几何体是一个半圆柱, 点 P 是半圆弧 \widehat{AD} 上一动点 (点 P 与点 A, D 不重合), $AB = AD = 4$.

(1) 证明: $DP \perp PB$;

(2) 若点 P 在平面 $ABCD$ 的射影为点 H , 设 \widehat{AD} 的中点为 E 点, 当点 P 运动到某个位置时, 平面 PBD 与平面 CDE 的夹角为 45° , 求此时 DH 的长度.



20. (12分)

2022年卡塔尔世界杯决赛圈共有32队参加,其中欧洲球队有13支,分别是德国、丹麦、法国、西班牙、英格兰、克罗地亚、比利时、荷兰、塞尔维亚、瑞士、葡萄牙、波兰、威尔士.

世界杯决赛圈赛程分为小组赛和淘汰赛,当进入淘汰赛阶段时,比赛必须要分出胜负.淘汰赛规则如下:在比赛常规时间90分钟内分出胜负,比赛结束,若比分相同,则进入30分钟的加时赛.在加时赛分出胜负,比赛结束,若加时赛比分依然相同,就要通过点球大战来分出最后的胜负.点球大战分为2个阶段.第一阶段:前5轮双方各派5名球员,依次踢点球,以5轮的总进球数作为标准(非必要无需踢满5轮),前5轮合计踢进点球数更多的球队获得比赛的胜利.第二阶段:如果前5轮还是平局,则进入“突然死亡”阶段,双方依次轮流踢点球,如果在该阶段一轮里,双方都进球或者双方都不进球,则继续下一轮,直到某一轮里,一方罚进点球,另一方没罚进,比赛结束,罚进点球的一方获得最终的胜利.

下表是2022年卡塔尔世界杯淘汰赛阶段的比赛结果:

| 淘汰赛 | 比赛结果 | 淘汰赛 | 比赛结果 |
|--------|-----------------|--------|-----------------|
| 1/8 决赛 | 荷兰 3:1 美国 | 1/4 决赛 | 克罗地亚(4)1:1(2)巴西 |
| | 阿根廷 2:1 澳大利亚 | | 荷兰(3)2:2(4)阿根廷 |
| | 法国 3:1 波兰 | | 摩洛哥 1:0 葡萄牙 |
| | 英格兰 3:0 塞内加尔 | | 英格兰 1:2 法国 |
| | 日本(1)1:1(3)克罗地亚 | 半决赛 | 阿根廷 3:0 克罗地亚 |
| | 巴西 4:1 韩国 | | 法国 2:0 摩洛哥 |
| | 摩洛哥(3)0:0(0)西班牙 | 季军赛 | 克罗地亚 2:1 摩洛哥 |
| | 葡萄牙 6:1 瑞士 | 决赛 | 阿根廷(4)3:3(2)法国 |

注:“阿根廷(4)3:3(2)法国”表示阿根廷与法国在常规比赛及加时赛的比分为3:3,在点球大战中阿根廷4:2战胜法国.

- (1)请根据上表估计在世界杯淘汰赛阶段通过点球大战分出胜负的概率.
- (2)根据题意填写下面的 2×2 列联表,并通过计算判断是否能在犯错的概率不超过0.01的前提下认为“32支决赛圈球队闯入8强”与是否为欧洲球队有关.

| | 欧洲球队 | 其他球队 | 合计 |
|-------|------|------|----|
| 闯入8强 | | | |
| 未闯入8强 | | | |
| 合计 | | | |

- (3)若甲、乙两队在淘汰赛相遇,经过120分钟比赛未分出胜负,双方进入点球大战.已知甲队球员每轮踢进点球的概率为 p ,乙队球员每轮踢进点球的概率为 $\frac{2}{3}$,求在点球大战中,两队前2轮比分为2:2的条件下,甲队在第一阶段获得比赛胜利的概率(用 p 表示).

参考公式： $\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n=a+b+c+d$.

| | | | | | |
|------------|-------|-------|-------|-------|--------|
| α | 0.1 | 0.05 | 0.01 | 0.005 | 0.001 |
| x_α | 2.706 | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

21. (12分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 10, 且经过点 $M(8, 3\sqrt{3})$. A, B 为双曲线 E 的左、右顶点, P 为直线 $x=2$ 上的动点, 连接 PA, PB 交双曲线 E 于点 C, D (不同于 A, B).

(1) 求双曲线 E 的标准方程.

(2) 直线 CD 是否过定点? 若过定点, 求出定点坐标; 若不过定点, 请说明理由.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + a \ln x - 2x$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

(2) 若 $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < x_2$. $f(x_1) + f(x_2) < -3e^{-2} - 2$ 恒成立.

① 求 a 的取值范围;

② 证明: $f(x) < \frac{1}{2}x^2 + (a-1)\ln x - (a+2)x + xe^x - 1$.

密封线内不要答题

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw



自主选拔在线
微信号: zizzsw