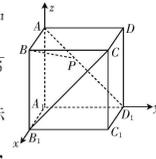


### 高三数学考试卷参考答案

1. C  $(1+i)(2+i)=1+3i$ , 虚部为 3.
2. D 因为  $A \cap B \neq \emptyset$ , 所以  $a=1, a=2$  或  $a=2a-2$ . 当  $a=1$  时,  $2a-2=0$ , 集合  $B$  中的元素满足互异性, 符合条件. 当  $a=2$  时,  $2a-2=2$ , 集合  $B$  的元素不满足互异性, 不符合条件. 当  $a=2a-2$  时,  $a=2, 2a-2=2$ , 集合  $B$  的元素不满足互异性, 不符合条件.
3. A 若曲线  $\frac{x^2}{k-2} + \frac{y^2}{4-k} = 1$  表示双曲线, 则  $(k-2)(4-k) < 0$ , 解得  $k > 4$  或  $k < 2$ . 故“ $k > 4$ ”是“曲线  $\frac{x^2}{k-2} + \frac{y^2}{4-k} = 1$  表示双曲线”的充分不必要条件.
4. D  $f'(x) = (2x+2m)e^{2+2mx}$ , 因为  $x=2$  是  $f(x)$  的极值点, 所以  $f'(2) = (4+2m)e^{4+2m} = 0$ , 解得  $m = -2$ . 经检验, 知当  $m = -2$  时,  $x=2$  是  $f(x)$  的极值点, 则  $f(2) = e^{-4}$ .
5. C 设  $a_2 = x$ , 则  $a_1 = 2x, a_3 = 3x, a_4 = 4x, a_5 = 7x, a_6 = 11x$ , 则  $S_5 = 28x = 28$ , 即  $x = 1$ , 则  $a_7 = 18, a_8 = 29, a_9 = 47, a_{10} = 76$ .
6. B 如图, 灯罩的轴截面为等腰梯形  $ABCD$ , 其中  $O_1, O_2$  分别是灯罩上、下底面圆的圆心,  $O$  是灯罩外接球的球心, 则  $AB = 10$  cm,  $CD = 24$  cm,  $O_1O_2 = 17$  cm, 设  $OO_1 = x$  cm, 则  $5^2 + x^2 = 12^2 + (17-x)^2$ , 解得  $x = 12$ , 则灯罩外接球的半径  $R = 13$  cm, 体积  $V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{8788\pi}{3}$  cm<sup>3</sup>.
7. B 设  $M(x, y)$ , 由  $|MA| = 2|MO|$ , 可得  $\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ , 整理得  $x^2 + (y+1)^2 = 4$ , 则直线  $l: y = kx + 3$  与圆  $x^2 + (y+1)^2 = 4$  有公共点, 则  $|\frac{3 - (-1)}{\sqrt{k^2 + 1}}| \leq 2$ , 即  $k^2 \geq 3$ , 解得  $k \leq -\sqrt{3}$  或  $k \geq \sqrt{3}$ .
8. A  $3^a = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ , 则  $a > -1, 7^b = \frac{1}{5} > \frac{1}{7}$ , 则  $b > -1$ . 因为  $3^a = \frac{1}{2}$ , 所以  $a = -\log_3 2$ , 因为  $7^b = \frac{1}{5}$ , 所以  $b = -\log_7 5$ . 又  $\log_5 2 = \log_{27} 8 < \log_{27} 9 = \frac{2}{3}, \log_7 5 = \log_{125} 125 > \log_{125} 49 = \frac{2}{3}$ , 所以  $-\log_3 2 > -\log_7 5$ , 故  $a > b > -1$ .
9. ABD 由图可知, 2013 年至 2022 年人均国内生产总值逐年递增, A 正确. 2013 年至 2022 年人均国内生产总值的极差为  $85698 - 43497 = 42201$ , B 正确. 因为  $10 \times 80\% = 8$ , 所以这 10 年的人均国内生产总值的 80% 分位数是  $\frac{71828 + 81370}{2} = 76599$ , C 不正确. 由图中数据分析可知, 这 10 年的人均国内生产总值的平均数不小于 59592, D 正确.
10. BC  $f(x) - 1 = \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}$ , 令函数  $g(x) = \ln x - x + 1$ , 则  $g'(x) = \frac{1-x}{x}$ . 当  $x \in (0, 1)$  时,  $g'(x) > 0, g(x)$  单调递增; 当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $g'(x) < 0, g(x)$  单调递减. 故  $g(x)_{\max} = g(1) = 0$ . 当  $0 < x < 1$  时,  $\frac{\ln x - x + 1}{x - 1} > 0$ , 即  $f(x) > 1$ ; 当  $x > 1$  时,  $\frac{\ln x - x + 1}{x - 1} < 0$ , 即  $f(x) < 1$ .

故选 BC.

11. BCD  $f(x) = \sin 2x + a \cos 2x = \sqrt{1+a^2} \sin(2x + \varphi)$ , 其中  $\tan \varphi = a$ . 因为  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq f(-\frac{\pi}{12})$ , 所以  $2 \times (-\frac{\pi}{12}) + \varphi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 则  $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \tan \varphi = a = -\sqrt{3}$ ,  $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3})$ . 当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $-\frac{\pi}{3} < 2x - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}, f(x)$  不单调, A 不正确. 当  $x = \frac{5\pi}{3}$  时,  $2x - \frac{\pi}{3} = 3\pi$ , 故  $f(x)$  的图象关于点  $(\frac{5\pi}{3}, 0)$  对称, B 正确.  $f(x + \frac{5\pi}{12}) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{2}) = 2\cos 2x$ , 所以将  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{5\pi}{12}$  个单位长度, 得到函数  $y = 2\cos 2x$  的图象, C 正确.  $f(a) = 2\sin(2a - \frac{\pi}{3}) = \frac{6}{5}$ , 则  $\sin(2a - \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{5}$ . 因为  $a \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 所以  $2a - \frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ . 由  $\frac{3}{5} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 得  $2a - \frac{\pi}{3} \in (0, \frac{\pi}{2})$ , 所以  $\cos(2a - \frac{\pi}{3}) = \frac{4}{5}$ .  $\sin 2a = \sin[(2a - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}] = \sin(2a - \frac{\pi}{3})\cos \frac{\pi}{3} + \cos(2a - \frac{\pi}{3})\sin \frac{\pi}{3} = \frac{3+4\sqrt{3}}{10}$ , D 正确.
12. ABD 对于 A 选项, 在  $AB$  上取点  $H$  (图略), 使得  $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ . 在  $CD$  上取点  $K$ , 使得  $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$ , 则由  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD}$ , 得  $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AH} = \lambda\overrightarrow{AD}$ , 即  $\overrightarrow{HP} = \lambda\overrightarrow{AD}$ , 故  $P$  是线段  $HK$  上一点. 将平面  $HKC_1B_1$  沿  $HK$  展开至与平面  $AHKD$  共面, 此时  $AB_1 = AH + B_1H = 3$ . 当  $B_1, P, D$  三点共线时,  $B_1P + PD$  取得最小值  $\sqrt{13}$ , A 正确. 对于 B 选项, 由  $\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + (1-\lambda)\overrightarrow{AD} (0 \leq \lambda \leq 1)$ , 可知  $P$  是线段  $BD$  上一点. 连接  $AC$  并与  $BD$  交于点  $Z$  (图略). 当  $P$  与  $D$  重合时, 平面  $PAD_1$  与平面  $ADD_1A_1$  重合, 不符合题意. 当  $P$  在线段  $DZ$  (不含点  $D$ ) 上时, 平面  $PAD_1$  截正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  所得截面为三角形, 且当  $P$  与  $Z$  重合时, 截面面积最大, 最大值为  $2\sqrt{3}$ . 当  $P$  在线段  $BZ$  (不含点  $B, Z$ ) 上时, 延长  $AP$  并与  $BC$  交于点  $W$ , 作  $WR \parallel AD_1$  并与  $CC_1$  交于点  $R$  (图略), 则截面为等腰梯形  $AWRD_1$ , 设  $BW = x$ , 则  $AW = D_1R = \sqrt{4+x^2}, WR = \sqrt{2}(2-x)$ . 梯形  $AWRD_1$  的高  $h = \sqrt{AW^2 - (\frac{AD_1 - WR}{2})^2} = \sqrt{4 + \frac{1}{2}x^2}$ , 面积为  $\frac{1}{2}(AD_1 + WR) \cdot h = \frac{(4-x)\sqrt{8+x^2}}{2} < 4\sqrt{2}$ . 当  $P$  与  $B$  重合时, 截面为矩形  $ABC_1D_1$ , 面积为  $4\sqrt{2}$ . 故平面  $PAD_1$  截正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  所得截面面积的最大值为  $4\sqrt{2}$ , B 正确. 对于 C 选项, 因为  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD_1}$ , 所以  $P$  为  $AD_1$  的中点, 三棱锥  $P-ABC$  的表面积为  $\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{6} + \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ , C 不正确. 对于 D 选项, 以  $A_1$  为坐标原点, 建立如图所示的空间直角坐标系, 则  $C_1(2, 2, 0), D(0, 2, 2)$ ,



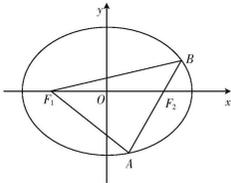
因为  $\overrightarrow{C_1D} = (-2, 0, 2)$ ,  $\overrightarrow{BP} = (-2, 2\lambda, -2\lambda)$ ,  $\cos\langle\overrightarrow{C_1D}, \overrightarrow{BP}\rangle = \frac{\overrightarrow{C_1D} \cdot \overrightarrow{BP}}{|\overrightarrow{C_1D}| |\overrightarrow{BP}|} = \frac{4-4\lambda}{4\sqrt{4\lambda^2+2}} = \frac{1-\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+2}}$ . 因为  $0 \leq \lambda \leq 1$ , 所以  $0 \leq \frac{1-\lambda}{\sqrt{4\lambda^2+2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 所以直线  $C_1D$  与  $BP$  所成角的最小值为  $45^\circ$ , D 正确.

13. 16 由题可知, 男生、女生都有人被选中的选法共有  $C_3^2 C_1^1 + C_2^2 C_1^1 = 16$  种.

14.  $\frac{2\pi}{3}$  或  $120^\circ$  因为  $(a+b) \perp a$ , 所以  $(a+b) \cdot a = 0$ , 则  $a \cdot b = -a^2$ .  $\cos\langle a, b \rangle = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{-|a|^2}{2|a|^2} = -\frac{1}{2}$ , 则  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{2\pi}{3}$ .

15. -1 因为  $f(x)$  是定义在  $\mathbf{R}$  上的偶函数, 且  $f(x) + f(4-x) = 0$ , 所以  $f(x) = -f(4-x) = -f(x-4) = f(x-8)$ , 故  $f(x)$  是以 8 为周期的函数, 则  $f(2024) = f(0)$ . 令  $x=2$ , 则  $f(2) + f(4-2) = 2f(2) = 8a + 8 = 0$ , 则  $a = -1$ , 所以  $f(0) = -2^0 = -1$ , 即  $f(2024) = -1$ .

16.  $\frac{2}{3}$  如图, 由  $\triangle AF_1F_2$  的面积是  $\triangle BF_1F_2$  面积的 2 倍, 可得  $|AF_2|^2 = 2|BF_2|^2$ , 不妨设  $|AF_2| = 2x$ ,  $|BF_2| = x$ ,  $|F_1F_2| = 2c$ , 则  $|AF_1| = 2a - 2x$ ,  $|BF_1| = 2a - x$ . 在  $\triangle AF_1F_2$  中, 由  $|AF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |AF_1|^2 = 2|AF_2| |F_1F_2| \cos 60^\circ$ , 得  $4x^2 + 4c^2 - (2a - 2x)^2 = 4cx$ , 整理得  $4c^2 - 4a^2 + 8ax - 4cx = 0$ . 在  $\triangle BF_1F_2$  中, 由  $|BF_2|^2 + |F_1F_2|^2 - |BF_1|^2 = 2|BF_2| |F_1F_2| \cos 120^\circ$ , 得  $x^2 + 4c^2 - (2a - x)^2 = -2cx$ , 整理得  $4c^2 - 4a^2 + 4ax + 2cx = 0$ , 则  $x = \frac{3a^2 - 3c^2}{4a}$ , 整理得  $c^2 - a^2 + \frac{3c(a^2 - c^2)}{2a} = 0$ , 即  $\frac{c}{a} = \frac{2}{3}$ . 故  $C$  的离心率为  $\frac{2}{3}$ .



17. 解: (1) 设  $\{a_n\}$  的公比为  $q$ , 则  $q > 0$ . ..... 1 分  
由  $a_1 + a_3 = 34$ ,  $a_5 + a_7 = 544$ , 得  $34q^2 = 544$ , 解得  $q = 4$ . ..... 2 分  
 $a_1 + a_5 = 17a_1 = 34$ , 则  $a_1 = 2$ . ..... 3 分  
故  $a_n = a_1 q^{n-1} = 2 \times 4^{n-1} = 2^{2n-1}$ . ..... 5 分  
(2) 由 (1) 可知  $b_n = \log_2 a_n = 2n - 1$ , ..... 7 分  
则  $\{b_n\}$  是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, ..... 8 分  
故  $S_n = \frac{n(b_1 + b_n)}{2} = n^2$ . ..... 10 分

18. (1) 证明: 取  $AD$  的中点  $F$ , 连接  $EF, PF, BD$ , 因为  $\triangle PAD$  是正三角形, 所以  $PF \perp AD$ . ..... 1 分  
又平面  $PAD \perp$  平面  $ABCD$ , 平面  $PAD \cap$  平面  $ABCD = AD$ , 所以  $PF \perp$  平面  $ABCD$ . ..... 2 分  
因为  $AC \subset$  平面  $ABCD$ , 所以  $PF \perp AC$ . ..... 3 分  
因为  $E$  是  $AB$  的中点, 所以  $EF \parallel BD$ . 又底面  $ABCD$  是菱形, 所以  $BD \perp AC$ , 从而  $EF \perp AC$ . ..... 4 分

因为  $PF \cap EF = F$ , 所以  $AC \perp$  平面  $PEF$ . ..... 5 分  
因为  $PE \subset$  平面  $PEF$ , 所以  $AC \perp PE$ . ..... 6 分  
(2) 解: 连接  $BF$ , 因为  $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$ , 所以  $\triangle ABD$  是正三角形, 所以  $BF \perp AD$ . ..... 7 分  
以  $F$  为坐标原点,  $FA, FB, FP$  所在的直线分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴, 建立如图所示的空间直角坐标系.

令  $AB = 2$ , 则  $C(-2, \sqrt{3}, 0)$ ,  $E(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $P(0, 0, \sqrt{3})$ ,

则  $\overrightarrow{CE} = (\frac{5}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ ,  $\overrightarrow{CP} = (2, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ . ..... 8 分

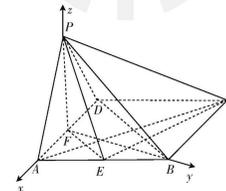
设平面  $CEP$  的法向量为  $m = (x_0, y_0, z_0)$ , 则  $\begin{cases} \overrightarrow{CE} \cdot m = \frac{5}{2}x_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}y_0 = 0, \\ \overrightarrow{CP} \cdot m = 2x_0 - \sqrt{3}y_0 + \sqrt{3}z_0 = 0, \end{cases}$

令  $x_0 = \sqrt{3}$ , 得  $m = (\sqrt{3}, 5, 3)$ . ..... 9 分

由题可知,  $n = (0, 0, 1)$  是平面  $ACE$  的一个法向量. ..... 10 分

$\cos\langle m, n \rangle = \frac{m \cdot n}{|m| |n|} = \frac{3}{\sqrt{37}} = \frac{3\sqrt{37}}{37}$ . ..... 11 分

由图可知, 二面角  $A-CE-P$  为锐角, 则二面角  $A-CE-P$  的余弦值为  $\frac{3\sqrt{37}}{37}$ . ..... 12 分



19. 解: (1) 因为  $\frac{a \cos B - b \cos A}{a \cos B + b \cos A} = \frac{b+c}{c}$ , 所以  $\frac{\sin A \cos B - \sin B \cos A}{\sin A \cos B + \sin B \cos A} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin C}$ . ..... 1 分  
又  $\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ . ..... 2 分  
所以  $\sin A \cos B - \sin B \cos A = \sin B + \sin A \cos B + \sin B \cos A$ . ..... 3 分  
整理得  $\sin B(2 \cos A + 1) = 0$ . ..... 4 分  
因为  $\sin B \neq 0$ , 所以  $2 \cos A + 1 = 0$ , 即  $\cos A = -\frac{1}{2}$ . ..... 5 分  
又  $A \in (0, \pi)$ , 所以  $A = \frac{2\pi}{3}$ . ..... 6 分

(2) 因为  $\triangle ABC$  的面积为  $\sqrt{3}$ , 所以  $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{3}}{4}bc = \sqrt{3}$ , 则  $bc = 4$ . ..... 7 分

设边  $BC$  的中点为  $D$ , 则  $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ , 且  $|\vec{AD}| = 1$ , ..... 8 分

则  $\vec{AD}^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB} + \vec{AC})^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2) = 1$ , ..... 9 分

则  $b^2 + c^2 + 2bc\cos\angle BAC = b^2 + c^2 - bc = 4$ , 则  $b^2 + c^2 + bc = 8$ , ..... 10 分

在  $\triangle ABC$  中,  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle BAC = b^2 + c^2 + bc = 12$ , 则  $a = 2\sqrt{3}$ , ..... 12 分

20. 解: (1) 由题可知, 星期三禁止出车的车辆为  $E$ , 可以出车的车辆为  $A, B, C, D$ , ..... 1 分

则星期三该公司恰有两辆车出车的概率  $P = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} + 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{8}$ .  
..... 4 分

(2) 由题可知, 星期一禁止出车的车辆为  $A$ , 可以出车的车辆为  $B, C, D, E$ .  
记星期一该公司出车的数量为  $X$ , 则  $X$  的取值可能为  $0, 1, 2, 3, 4$ . ..... 5 分

$P(X=0) = (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{2}{3})^2 = \frac{1}{9}$ ,  $P(X=1) = C_2^1(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{2}{3})^2 + C_2^1(\frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ ,  
 $P(X=2) = (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{2}{3})^2 + (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{3})^2 + C_2^1 \times (\frac{1}{2})^2 \times C_2^1 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{13}{36}$ ,  
 $P(X=3) = C_2^1(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{3})^2 + C_2^1(\frac{1}{2})^2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$ ,  $P(X=4) = (\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{36}$ .  
..... 9 分

故  $X$  的分布列为

$X$	0	1	2	3	4
$P$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$

..... 10 分

$E(X) = 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{13}{36} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{36} = \frac{5}{3}$ . ..... 12 分

21. 解: (1) 由题可知  $\begin{cases} 36 = 2px_0, \\ x_0 + \frac{p}{2} = 10, \end{cases}$  ..... 2 分

解得  $\begin{cases} x_0 = 9, \\ p = 2 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x_0 = 1, \\ p = 18 \end{cases}$  (舍去). ..... 3 分

故抛物线  $C$  的方程为  $y^2 = 4x$ . ..... 4 分

(2) 设  $l_1$  的方程为  $x = my + a$ ,  $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ,  
联立方程组  $\begin{cases} y^2 = 4x, \\ x = my + a, \end{cases}$  整理得  $y^2 - 4my - 4a = 0$ ,  
则  $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4a$ . ..... 6 分

$|PQ| = \sqrt{1+m^2} \sqrt{(y_1+y_2)^2 - 4y_1 y_2} = 4\sqrt{(1+m^2)(m^2+a)}$ , ..... 7 分

$|NP| = \sqrt{1+m^2}|y_1|, |NQ| = \sqrt{1+m^2}|y_2|$ , 则  $|NP| \cdot |NQ| = (1+m^2)|y_1 y_2| = 4a(1+m^2)$ .  
..... 8 分

由  $|NP| \cdot |NQ| = |PQ|^2$ , 得  $4a(1+m^2) = 4\sqrt{(1+m^2)(m^2+a)}$ , ..... 9 分

整理得  $(a-1)(am^2+m^2+a) = 0$ . ..... 11 分

因为  $am^2+m^2+a > 0$ , 所以  $a-1=0$ , 即  $a=1$ . ..... 12 分

22. 解: (1) 因为  $f(x) = \sin x + \frac{1}{x}$ , 所以  $f'(x) = \cos x - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 \cos x - 1}{x^2}$ , ..... 1 分

则  $f'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{\pi^2}$ . ..... 2 分

又  $f(\frac{\pi}{2}) = 1 + \frac{2}{\pi}$ , 所以曲线  $y=f(x)$  在  $x=\frac{\pi}{2}$  处的切线方程为  $y - (1 + \frac{2}{\pi}) = -\frac{4}{\pi^2}(x - \frac{\pi}{2})$ ,  
即  $4x + \pi^2 y - \pi^2 - 4\pi = 0$ . ..... 5 分

(2)  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  上有且仅有一个零点, 等价于方程  $a = \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x^3}$  在  $(0, \pi)$  上有且仅有一个实数根. .... 6 分

令函数  $h(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{x^3}, 0 < x < \pi$ , 则  $h'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} - \frac{2}{x^3} = \frac{x(x \cos x - \sin x) - 2}{x^3}$ .  
..... 7 分

令函数  $\varphi(x) = x \cos x - \sin x$ , 则  $\varphi'(x) = -x \sin x < 0$  在  $(0, \pi)$  上恒成立, 则  $\varphi(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递减. .... 8 分

故当  $x \in (0, \pi)$  时,  $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$ , ..... 9 分

从而  $h'(x) < 0$  在  $(0, \pi)$  上恒成立, 则  $h(x)$  在  $(0, \pi)$  上单调递减. .... 10 分

显然, 当  $x \rightarrow 0$  时,  $h(x) \rightarrow +\infty$ , 因为  $h(\pi) = \frac{1}{\pi^3}$ , 所以  $h(x)$  的值域为  $(\frac{1}{\pi^3}, +\infty)$ ,  
故  $a$  的取值范围为  $(\frac{1}{\pi^3}, +\infty)$ . ..... 12 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：  
www.zizs.com](http://www.zizs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线