如皋市2024届高三上学期8月诊断测试
数学参考答案 2023.08

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	B	D	B	C	A	B

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.全部选对得5分，部分选对得2分，有选错得0分.

题号	9	10	11	12
答案	BCD	AD	BC	AD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

题号	13	14	15	16
答案	1050	$[2\sqrt{2},2\sqrt{3}]$	$(1,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\frac{\sqrt{21}}{3})$	5e

四、解答题：本题共6小题，共70分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.

(1) 证明：如图，连接 EF，

因为 E、F 分别是 C_1D_1、AB 的中点，所以 $EC_1=BF$，$EC_1 // BF$，

所以四边形 $EFBC_1$ 为平行四边形，则 $EF // BC_1$，

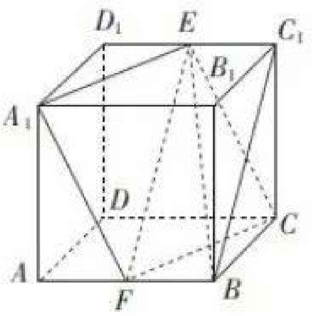
又 $EF\subset$ 平面 A_1ECF，$BC_1\not\subset$ 平面 A_1ECF，所以 $BC_1 //$ 平面 A_1ECF.

(2) 解：连接 EB，设点 B 到平面 A_1ECF 的距离为 h. $V_{E-BFC}=\frac{1}{3}S_{\triangle BFC}\cdot CC_1=\frac{2}{3}$，

在 $\triangle EFC$ 中，$EF=2\sqrt{2}$，$EC=FC=\sqrt{5}$，

$S_{\triangle EFC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\sqrt{5-2}=\sqrt{6}$.

又因为 $V_{E-BFC}=V_{B-EFC}$，所以 $\frac{1}{3}\times\sqrt{6}h=\frac{2}{3}$，解得 $h=\frac{\sqrt{6}}{3}$.



18.

解：(1) 因为 $\vec{m}\perp\vec{n}$，所以 $(\sin C+\sin B)(c-b)+(\sin B-\sin A)a=0$，

由正弦定理得：$(c+b)(c-b)+(b-a)a=0$，即 $a^2+b^2-c^2=ab$，

由余弦定理得：$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\dfrac{\pi}{3}$;来源：高三答案公众号

(2) $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}\times2\times b\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，解得 $b=4$，

因为 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{DB}$，所以 D 为 AB 的三等分点，$AD=2DB$，

则 $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CB}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB})=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB}$，

所以 $\left|\overrightarrow{CD}\right|^2=\dfrac{1}{9}\overrightarrow{CA}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{CB}^2+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{9}\times16+\dfrac{4}{9}\times4+\dfrac{4}{9}\times2\times4\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{48}{9}$，

即 $CD=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

19.

解：(1) $f(x)=x-\ln x-\dfrac{e^x}{x}$，定义域为 $(0,+\infty)$，

则 $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}=\dfrac{(x-1)(x-e^x)}{x^2}$，

令 $g(x)=e^x-x-1, g'(x)=e^x-1$

$\because x\in(0,+\infty), g'(x)>0$ 恒成立，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$\therefore g(x)>g(0)=0$，即当 $x>0$ 时，$e^x>x+1>x$

令 $f'(x)\geqslant0$，可得 $0<x\leqslant1$，得 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=1-e$.

(2) 证明：要证 $1+x^3+\dfrac{e^x}{x}\geqslant 3x-f(x)$，即证 $x^3-2x+1\geqslant \ln x$，

令 $h(x)=x-1-\ln x, h'(x)=1-\dfrac{1}{x}$

令 $h'(x)\geqslant 0$, 得 $x\geqslant 1$, 即 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 单调递减, $(1,+\infty)$ 单调递增，

$h(x)\geqslant h(1)=0$, 即 $x-1\geqslant \ln x$

即欲证 $x^3-2x+1\geqslant \ln x$，只需证 $x^3-2x+1\geqslant x-1$. 也就是证明 $x^3-3x+2\geqslant 0$.(*)

设 $\varphi(x)=x^3-3x+2(x>0)$，则 $\varphi'(x)=3x^2-3$，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=1$.

当 $x\in(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$; 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$.

$\therefore$ 当 $x=1$ 时，$\varphi(x)$ 取到最小值 $\varphi(1)=0$.

故(*)式成立，从而 $1+x^3+\dfrac{e^x}{x}\geqslant 3x-f(x)$ 成立.

20.

解：(1) 当 $n=3$ 时，$3S_2=3S_1+S_3$，所以 $3S_2-3S_1=S_3$，即 $3a_2=a_1+a_2+a_3$，

即 $2a_2=a_1+a_3$，即证；

(2) 因为 $nS_{n-1}=nS_1+(n-2)S_n(n\geqslant 2)$，即 $0=nS_1+n(S_n-S_{n-1})-2S_n(n\geqslant 2)$

且 $S_n-S_{n-1}=a_n(n\geqslant 2)$，$S_1=a_1$，所以 $2S_n=na_1+na_n(n\geqslant 2)$，

则 $2S_{n-1}=(n-1)a_1+(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 3)$，

两式相减，可得 $2S_n-2S_{n-1}=2a_n=a_1+na_n-(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 3)$，

整理得 $(n-2)a_n+a_1=(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 3)$，

所以 $(n-1)a_{n+1}+a_1=na_n(n\geqslant 2)$，

两式相减，可得 $(n-1)a_{n+1}-(n-2)a_n=na_n-(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 3)$，

整理得 $(n-1)(a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n)=0(n\geqslant 3)$，且 $n-1\neq 0$，

所以 $a_{n+1}+a_{n-1}-2a_n=0(n\geqslant 3)$，即当 $n\geqslant 2$ 时，$\{a_n\}$ 成等差数列,

又由(1)可知，a_1，a_2，a_3成等差数列，

所以数列$\{a_n\}$为等差数列；

(3) 假设存在符合题意的n，d，则由$S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)d}{2}$，

可知，$15=-2n+\dfrac{n(n-1)d}{2}$，当$n=1$时，上式显然不成立，

当$n\geqslant2$时，$d=\dfrac{2(2n+15)}{n(n-1)}$，因为$d\in N^*$，且$2n+15$为奇数，$n(n-1)$为偶数，

所以$\dfrac{2(2n+15)}{n(n-1)}$必为奇数，若$\dfrac{2(2n+15)}{n(n-1)}=1$，则$n^2-5n-30=0(n\geqslant2)$，无正整数解，

所以$\dfrac{2(2n+15)}{n(n-1)}\geqslant3$，整理得$3n^2-7n-30\leqslant0(n\geqslant2)$，解得$2\leqslant n\leqslant4$，

当$n=2$时，$d=\dfrac{2(2n+15)}{n(n-1)}=19\in\mathbf{N}^*$，符合题意，

当$n=3$时，$d=\dfrac{2(2n+15)}{n(n-1)}=7\in\mathbf{N}^*$，符合题意，

当$n=4$时，$d=\dfrac{2(2n+15)}{n(n-1)}=\dfrac{23}{6}\notin\mathbf{N}^*$，不符合题意，

综上，存在$n=2$，$d=19$及$n=3$，$d=7$符合题意．

21.

解：(1) 当$n=3$时，从装有5只小球的口袋中有放回的取球6次，共包含5^6种情况．

记"恰好取到3次红球"为事件A，事件A包含$C_6^3 4^3$种情况．故$P(A)=\dfrac{C_6^3 4^3}{5^6}=\dfrac{4^4}{5^5}=\dfrac{256}{3125}$.

答：当$n=3$时，恰好取到3次红球的概率为$\dfrac{256}{3125}$.

(2) 由题意知，随机变量Y的所有可能取值为0，1，3，5，…，$2n-1(n\in N^*)$.

则$P(Y=2i+1)=\dfrac{C_{2n}^{2i+1}\cdot4^{2n-(2i+1)}}{5^{2n}}$.

$$(2i+1)P(Y=2i+1)=(2i+1)\frac{C_{2n}^{2i+1}4^{2n-(2i+1)}}{5^{2n}}$$

$$=\frac{[(2i+1)\dfrac{(2n)!}{(2i+1)!(2n-2i-1)!}]4^{2n-(2i+1)}}{5^{2n}}$$

$=\dfrac{2nC_{2n-1}^{2i}4^{2n-(2i+1)}}{5^{2n}}(0\leqslant i\leqslant n-1,i\in N)$.

所以 $E(Y)=0\cdot P(Y=0)+1\cdot P(Y=1)+3P(Y=3)$

$+5P(Y=5)+\ldots+(2n-1)P(Y=2n-1)$

$=\dfrac{2n}{5^{2n}}(C_{2n-1}^{0}4^{2n-1}+C_{2n-1}^{2}4^{2n-3}+C_{2n-1}^{4}4^{2n-5}+\cdots+C_{2n-1}^{2n-2}4)$.

令 $x_n=C_{2n-1}^{0}4^{2n-1}+C_{2n-1}^{2}4^{2n-3}+C_{2n-1}^{4}4^{2n-5}+\cdots+C_{2n-1}^{2n-2}4$，

$y_n=C_{2n-1}^{1}4^{2n-2}+C_{2n-1}^{3}4^{2n-4}+C_{2n-1}^{5}4^{2n-6}+\cdots+C_{2n-1}^{2n-1}4^{0}$，

则 $x_n+y_n=C_{2n-1}^{0}4^{2n-1}+C_{2n-1}^{1}4^{2n-2}+C_{2n-1}^{2}4^{2n-3}$

$+C_{2n-1}^{3}4^{2n-4}+C_{2n-1}^{4}4^{2n-5}+\cdots+C_{2n-1}^{2n-1}4^{0}$

$=(4+1)^{2n-1}=5^{2n-1}$，

$x_n-y_n=C_{2n-1}^{0}4^{2n-1}-C_{2n-1}^{1}4^{2n-2}+C_{2n-1}^{2}4^{2n-3}$

$-C_{2n-1}^{3}4^{2n-4}+C_{2n-1}^{4}4^{2n-5}-\cdots-C_{2n-1}^{2n-1}4^{0}$

$=(4-1)^{2n-1}=3^{2n-1}$，

所以 $x_n=\dfrac{5^{2n-1}+3^{2n-1}}{2}$，所以 $E(Y)=\dfrac{2n}{5^{2n}}x_n=\dfrac{2n}{5^{2n}}\cdot\dfrac{5^{2n-1}+3^{2n-1}}{2}=\dfrac{n(5^{2n-1}+3^{2n-1})}{5^{2n}}$.

故 Y 的数学期望为 $\dfrac{n(5^{2n-1}+3^{2n-1})}{5^{2n}}$.

22.

证明：(1) 由题意可知该圆与抛物线交于一条直径，由对称性可知交点坐标为 $(1,1)$，$(-1,1)$，

代入抛物线方程可得 $2p=1$，所以抛物线的方程为 $x^2=y$；

设 $A(x_1,x_1^2)$，$B(x_2,x_2^2)$，所以 $k_{AB}=\dfrac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2$，

所以直线 AB 的方程为 $y-x_1^2=(x_1+x_2)(x-x_1)$，即 $y=(x_1+x_2)x-x_1x_2$.

因为直线 AB 过点 $E(0,2)$，所以 $-x_1x_2=2$，所以 $x_1x_2=-2$.①

设直线 PA：$y-x_1^2=k(x-x_1)$，与抛物线方程 $y=x^2$ 联立，可解得 $x=x_1$ 或 $x=k-x_1$，

又因为直线 PA 与抛物线相切，所以 $x_1 = k - x_1$，所以 $k = 2x_1$，

所以直线 PA 的方程为 $y - x_1^2 = 2x_1(x - x_1)$，即 $y = 2x_1x - x_1^2$，

同理直线 PB 的方程为 $y = 2x_2x - x_2^2$.

联立两直线方程，可得 $P(\frac{x_1+x_2}{2}, x_1x_2)$，

由①可知点 P 的纵坐标为定值 -2.

(2) 可知点 $F(0, \frac{1}{4})$，准线 l：$y = -\frac{1}{4}$.

过 A，B 分别作 $AA_1 \perp l$，$BB_1 \perp l$ 于点 A_1，B_1，

可知 $A_1(x_1, -\frac{1}{4})$，所以 $k_{A_1F} = -\frac{1}{2x_1}$，又 $k_{AP} = \dfrac{x_1^2 - x_1x_2}{x_1 - \dfrac{x_1+x_2}{2}} = 2x_1$，

所以 $k_{A_1F} \cdot k_{AP} = -1$，所以 $A_1F \perp AP$.

又 $|AA_1| = |AF|$，所以 $\triangle AA_1F$ 是等腰三角形，可知 PA 是 A_1F 的中垂线，

所以 $|PA_1| = |PF|$，所以 $\triangle AA_1P \cong \triangle AFP$，所以 $\angle PFA = \angle PA_1A$.

同理 $|PB_1| = |PF|$ 且 $\angle PFB = \angle PB_1B$，所以 $|PA_1| = |PB_1|$，

所以 $\angle PA_1B_1 = \angle PB_1A_1$，所以 $\angle PA_1A = \angle PB_1B$，

所以 $\angle PFA = \angle PFB$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。