

开封市 2023 届高三年级第一次模拟考试
数学(理科)参考答案

一、选择题(每小题 5 分,共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	D	A	B	B	C	D	C	A	C	B

二、填空题(每小题 5 分,共 20 分)

13. $\sqrt{2}$ 14. 5 15. $4\sqrt{2}$ 16. $4n^2+2n$

三、解答题(共 70 分)

17. (1) 因为 $A+B+C=\pi$, 所以 $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$, 得 $\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$,1 分

由正弦定理, 可得 $\sin A \cdot \sin\frac{A}{2}=\sin B \cdot \sin A$, $\sin A \neq 0$, 所以 $\sin\frac{A}{2}=\sin B$,2 分

又因为 A, B 均为三角形内角, 所以 $B=\frac{A}{2}$, 即 $A=2B$,3 分

又因为 $2a=3b$, 即 $2\sin A=3\sin B$, 即 $4\sin B \cos B=3\sin B$,4 分

$\sin B \neq 0$, 得 $\cos B=\frac{3}{4}$;5 分

(2) 若 $a=3$, 则 $b=2$, 由(1)知 $\cos B=\frac{3}{4}$,

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac \cos B$ 可得 $c^2-\frac{9}{2}c+5=0$,7 分

即 $(c-2)\left(c-\frac{5}{2}\right)=0$, 所以 $c=2$ 或 $\frac{5}{2}$,9 分

当 $c=2$ 时, $b=c$, 则 $A=2B=2C$, 即 $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形,

又因为 $a \neq \sqrt{2}b$, 此时不满足题意,11 分

所以 $c=\frac{5}{2}$12 分

18. (1) “星队”在 第一轮活动中猜对 1 个成语的概率为 $\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{2}{3}(1-p)+\left(1-\frac{2}{3}\right)p=\frac{1}{2}$, 解得 $p=\frac{1}{2}$4 分

(2) 设 A_i 表示事件“甲在两轮中猜对 i 个成语”, B_i 表示事件“乙在两轮中猜对 i 个成语”

($i=0,1,2$), 根据独立性假定, 得 $P(A_0)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{9}$, $P(A_1)=2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=\frac{4}{9}$, $P(A_2)=\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

$P(B_0)=\frac{1}{4}$, $P(B_1)=\frac{1}{2}$, $P(B_2)=\frac{1}{4}$,6 分

X 的可能取值为 0,1,2,3,4, 所以

$P(X=0)=P(A_0B_0)=\frac{1}{9} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{36}$, $P(X=1)=P(A_1B_1)+P(A_1B_0)=\frac{1}{9} \times \frac{1}{2}+\frac{4}{9} \times \frac{1}{4}=\frac{3}{18}$,

$P(X=2)=P(A_0B_2)+P(A_1B_1)+P(A_2B_0)=\frac{1}{9} \times \frac{1}{4}+\frac{4}{9} \times \frac{1}{2}+\frac{4}{9} \times \frac{1}{4}=\frac{13}{36}$,

$P(X=3)=P(A_1B_2)+P(A_2B_1)=\frac{4}{9} \times \frac{1}{4}+\frac{4}{9} \times \frac{1}{2}=\frac{3}{9}$, $P(X=4)=P(A_2B_2)=\frac{4}{9} \times \frac{1}{4}=\frac{1}{9}$,

X 的分布列如下表所示:

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{13}{36}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{9}$

……10 分

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{36} + 1 \times \frac{3}{18} + 2 \times \frac{13}{36} + 3 \times \frac{3}{9} + 4 \times \frac{1}{9} = 2\frac{1}{3}, \dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 取 CF 的中点 D , 连接 DM, DN ,

$\because M, N$ 分别是 AF, CE 的中点, $\therefore DM \parallel AC, DN \parallel EF$,

又 $\because DM \not\subset$ 平面 $ABC, AC \subset$ 平面 $ABC, \therefore DM \parallel$ 平面 ABC . ……2 分

又 $EF \parallel AB, \therefore DN \parallel AB$, 同理可得, $DN \parallel$ 平面 ABC . ……3 分

$\because DM \subset$ 平面 $MND, DN \subset$ 平面 $MND, DM \cap DN = D, \therefore$ 平面 $MND \parallel$ 平面 ABC . ……5 分

$\because MN \subset$ 平面 $MND, \therefore MN \parallel$ 平面 ABC . ……6 分

(2) 取 AB 的中点 O , 连接 OC, OE .

由已知得 $OA \parallel EF, \therefore OAFE$ 是平行四边形, $\therefore OE \parallel AF$.

$\because \triangle ABC$ 是正三角形, $\therefore OC \perp AB$,

$\because$ 平面 $ABC \perp$ 平面 $ABEF$, 平面 $ABC \cap$ 平面 $ABEF = AB, \therefore OC \perp$ 平面 $ABEF$,

又 $OE \subset$ 平面 $ABEF, \therefore OC \perp OE$. ……7 分

设 $AF = EF = EB = \frac{1}{2}AB = a, OC = \sqrt{3}a$,

在 $Rt\triangle COE$ 中, 由 $OC^2 + OE^2 = CE^2$, 解得 $a = 2$, 即 $AF = EF = EB = \frac{1}{2}AB = 2$. ……8 分

取 EF 的中点 P , 连接 OP , 则 $OP \perp AB$,

以 O 为原点, OP, OB, OC 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立直角坐标系如图所示.

则 $A(0, -2, 0), C(0, 0, 2\sqrt{3}), E(\sqrt{3}, 1, 0), N\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$,

$\overrightarrow{OA} = (0, -2, 0), \overrightarrow{ON} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$.

由已知易得, 平面 ABM 的一个法向量为 $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 2\sqrt{3})$. ……9 分

设平面 ABN 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\text{则} \begin{cases} \overrightarrow{OA} \cdot \mathbf{n} = 0, \\ \overrightarrow{ON} \cdot \mathbf{n} = 0, \end{cases} \text{即} \begin{cases} -2y = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \sqrt{3}z = 0, \end{cases}$$

取 $x = 2$, 则平面 ABN 的一个法向量为 $\mathbf{n} = (2, 0, -1)$. ……10 分

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{OC}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \mathbf{n}}{|\overrightarrow{OC}| |\mathbf{n}|} = \frac{-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \dots\dots 11 \text{ 分}$$

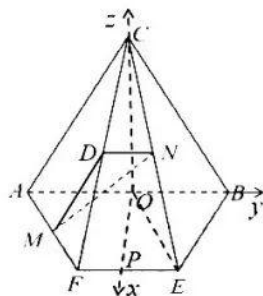
$\because$ 二面角 $M-AB-N$ 为锐角, $\therefore$ 二面角 $M-AB-N$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$. ……12 分

20. (1) 由已知可得: $f'(x) = 2\cos x - a \geq 0$, ……1 分

即 $a \leq 2\cos x$ 恒成立, 则有 $a \in (-\infty, -2]$. ……3 分

(2) 由已知可得: $g'(x) = 2\cos x - 1 - \frac{1}{x+1}$,

令 $h(x) = g'(x)$, $h'(x) = -2\sin x + \frac{1}{(x+1)^2}$ 在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递减, ……4 分



又因为, $h'(0) > 0$, $h'(\frac{\pi}{6}) < 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{6})$ 使得 $h'(x) = 0$,5 分

则有

x	$(0, x_0)$	$(x_0, \frac{\pi}{6})$
$h'(x)$	正	负
$g'(x)$	递增	递减

又有 $g'(0) = 0$, $g'(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\frac{\pi}{6} + 1} > \sqrt{3} - 1 - \frac{1}{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{3} - \frac{5}{3} > 0$,

所以在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上 $g'(x) > 0$,7 分

则 $g(x)$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{6}]$ 上单调递增, 所以最小值为 $g(0) = 0$8 分

(3) 由 (2) 可得 $2 \sin x > \ln(x+1) + x$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上恒成立,

令 $\varphi(x) = x - \ln(x+1)$, 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上 $\varphi'(x) = \frac{x}{x+1} > 0$, 所以 $\varphi(x)$ 单调递增且 $\varphi(0) = 0$,

所以 $x > \ln(x+1)$, $2 \sin x > 2 \ln(x+1)$, 从而当 $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时 $\sin x > \ln(x+1)$,10 分

令 $x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}$, 得到 $\sin \frac{1}{2} > \ln \frac{3}{2}$, $\sin \frac{1}{3} > \ln \frac{4}{3}$, $\sin \frac{1}{4} > \ln \frac{5}{4}$, ..., $\sin \frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{n}$,

相加得: $\sin \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{3} + \sin \frac{1}{4} + \dots + \sin \frac{1}{n} > \ln \frac{n+1}{2}$12 分

21. (1) 由题意, $\overrightarrow{ND} = \lambda \overrightarrow{DM}$, 设 $D(x, y)$, $M(x_0, 0)$, $N(0, y_0)$,

所以 $\overrightarrow{ND} = (x, y - y_0)$, $\overrightarrow{DM} = (x_0 - x, -y)$, $(x, y - y_0) = \lambda(x_0 - x, -y)$,1 分

由 $\begin{cases} x = \lambda(x_0 - x), \\ y - y_0 = \lambda(-y), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_0 = \frac{(1+\lambda)x}{\lambda}, \\ y_0 = (1+\lambda)y, \end{cases}$

又因为 $x_0^2 + y_0^2 = 9$, 所以 $\frac{(1+\lambda)^2 x^2}{\lambda^2} + (1+\lambda)^2 y^2 = 9$,3 分

将 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$ 分别代入, 得 $C_1: x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$,4 分

$C_2: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$5 分

(2) ① 直线 l 斜率不存在时, $l: x = \pm \frac{3}{2}$, 带入 C_2 方程得 $|AB| = \frac{\sqrt{7}}{2}$, 所以 $S = \frac{3\sqrt{7}}{8}$;6 分

② 直线 l 斜率存在时, 设 $l: y = kx + m$,

l 与曲线 C_1 相切, 所以 $\frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{3}{2}$, 即 $m^2 = \frac{9(k^2 + 1)}{4}$,7 分

联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = kx + m, \end{cases}$ 可得 $(1 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 4 = 0$,

由 $\Delta = 64k^2m^2 - 16(1+4k^2)(m^2-1) > 0$ 得 $k^2 > \frac{5}{7}$, $x_1 + x_2 = \frac{-8km}{1+4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4(m^2-1)}{1+4k^2}$,8 分

$|AB| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \frac{4\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+4k^2-m^2}}{1+4k^2} = \frac{2\sqrt{1+k^2}\sqrt{7k^2-5}}{1+4k^2}$,10 分

$|AB|^2 = \frac{4(7k^4+2k^2-5)}{16k^4+8k^2+1}$, 因为 $\frac{4(7k^4+2k^2-5)}{16k^4+8k^2+1} - \frac{7}{4} = \frac{-24k^2-87}{4(16k^4+8k^2+1)} < 0$,

所以 $|AB| < \frac{\sqrt{7}}{2}$, $S < \frac{3\sqrt{7}}{8}$11 分

综合①②可证, $S \leq \frac{3\sqrt{7}}{8}$12 分

22. (1) 消去参数 t 可得: $x^2 = 2py$, 将点 $(2, 4)$ 代入可得 $p = \frac{1}{2}$,2 分

所以曲线 C 的普通方程为: $x^2 = y$4 分

(2) 由已知得: OA, OB 的斜率存在且不为 0,

设 OA 的斜率为 k , 方程为 $y = kx$, 则 OB 的方程为: $y = -\frac{1}{k}x$,

联立方程 $\begin{cases} y = kx, \\ x^2 = y, \end{cases}$ 可得: $A(k, k^2)$, 同理可得: $B(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2})$,6 分

设 $M(x, y)$, 所以 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}(k - \frac{1}{k}), \\ y = \frac{1}{2}(k^2 + \frac{1}{k^2}), \end{cases}$ 8 分

所以 $4x^2 = k^2 + \frac{1}{k^2} - 2 = 2y - 2$, 所以 $2x^2 = y - 1$ 即为点 M 轨迹的普通方程.10 分

23. (1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = |x+1| + 2|x-1|$,

当 $x \leq -1$, $f(x) = -3x+1$, $f(x)_{\min} = f(-1) = 4$;

当 $-1 < x < 1$, $f(x) = -x+3$, $f(x) \in (2, 4)$;

当 $x \geq 1$, $f(x) = 3x-1$, $f(x)_{\min} = f(1) = 2$;2 分

$\therefore$ 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 的最小值为 2.4 分

(2) $a > 0$, $b > 0$, 当 $1 \leq x \leq 2$ 时,

$|x+a| + 2|x-1| > x^2 - b + 1$ 可化为 $a+b > x^2 - 3x + 3$ 6 分

令 $h(x) = x^2 - 3x + 3$, $x \in [1, 2]$, $h(x)_{\max} = h(1) = 1$, $\therefore a+b > 1$,8 分

$\therefore \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 = a^2 + b^2 + a + b + \frac{1}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{2} + a + b + \frac{1}{2} > 2$10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线