

2020 年哈三中高三学年第二次模拟考试

数学试卷（理工类）

考试说明：本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚。
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂，非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，字迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁，不得折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、刮纸刀。

第 I 卷（选择题，共 60 分）

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | y = \lg(x-2)\}$ ， $B = \{x | x^2 - 5x + 4 < 0\}$ ，则 $(C_R A) \cap B =$
 A. $\{x | 1 < x < 2\}$ B. $\{x | 1 < x \leq 2\}$ C. $\{x | 1 < x < 4\}$ D. $\{x | 1 < x \leq 4\}$
2. 若复数 z 满足 $z(i-2) = i$ ，其中 i 是虚数单位，则 $|z| =$
 A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{1}{5}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
3. 已知直线 $l_1: mx + y - 1 = 0$ ， $l_2: (2m+3)x + my - 1 = 0$ ， $m \in R$ ，则“ $m = -2$ ”是“ $l_1 \perp l_2$ ”的
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

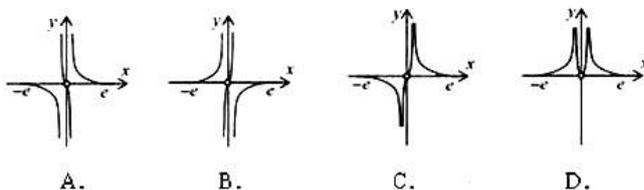
4. 若 a, b, c 为实数, 且 $a > b$, 则下列结论正确的是

- A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $a^2 > b^2$ C. $a|a| > b|b|$ D. $ac^2 > bc^2$

5. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $3a_2 + a_6 = -12$, $S_{10} = 20$, 则 S_n 取最小值时, n 的值为

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

6. 函数 $y = \frac{2 - \ln x^2}{2 + \ln x^2} \sin x, x \in [-e, e]$ 的图象大致为

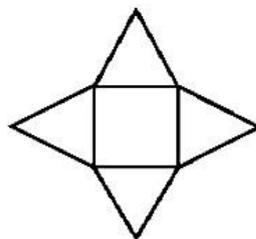


7. 已知四面体 $ABCD$ 中, AB, BC, BD 两两垂直, $BC = BD = \sqrt{2}$, AB 与平面 ACD 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 则点 B 到平面 ACD 的距离为

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

8. 2020 年新型冠状病毒肺炎蔓延全国, 作为主要战场的武汉, 仅用了十余天就建成了“小汤山”模式的火神山医院和雷神山医院, 再次体现了中国速度. 随着疫情发展, 某地也需要参照“小汤山”模式建设临时医院, 其占地是由一个正方形和四个以正方形的边为底边、腰长为 400m 的等腰三角形组成的图形 (如图所示). 为使占地面积最大, 则等腰三角形的底角为

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{4}$
C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{8}$



数学试卷 (理工类) 第 2 页 (共 8 页)

9. 给出下列命题，其中正确命题的个数为

①若样本数据 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的方差为 2，则数据 $2x_1 - 1, 2x_2 - 1, \dots, 2x_{10} - 1$ 的方差为 4；

②回归方程为 $\hat{y} = 0.6 - 0.45x$ 时，变量 x 与 y 具有负的线性相关关系；

③随机变量 X 服从正态分布 $N(3, \sigma^2)$ ， $P(X \leq 4) = 0.64$ ，则 $P(2 \leq X \leq 3) = 0.07$ ；

④甲同学所在的某校高三共有 5003 人，先剔除 3 人，再按系统抽样的方法抽取容量为 200 的一个样本，则甲被抽到的概率为 $\frac{1}{25}$ 。

A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

10. 已知 F_1, F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点，以 F_2 为圆心， a 为半径的

圆与双曲线的一条渐近线交于 A, B 两点，若 $|AB| > \frac{|F_1F_2|}{2}$ ，则双曲线的离心率的取

值范围是

A. $(1, \frac{2\sqrt{10}}{5})$ B. $(1, \frac{4\sqrt{34}}{17})$ C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(1, \frac{2\sqrt{6}}{3})$

11. 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中， $BD = 2\sqrt{3}$ ，将菱形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，使二面角 $B-AC-D$ 的大小为 60° ，则所得三棱锥 $A-BCD$ 的外接球表面积为

A. 4π B. $\frac{52}{9}\pi$ C. 6π D. $\frac{20}{3}\pi$

12. 若函数 $f(x) = (2ax + \frac{\ln x}{x}) \ln x - (a-1)x^3$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是

A. $(0, \frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$ B. $(1, \frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$ C. $(0, 1) \cup (1, \frac{4e^2+1}{4e^2-4e})$ D. $(0, 1) \cup \{\frac{4e^2+1}{4e^2-4e}\}$

2020 年哈尔滨市第三中学校第二次高考模拟考试

数学试卷（理工类）

第 II 卷（非选择题，共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

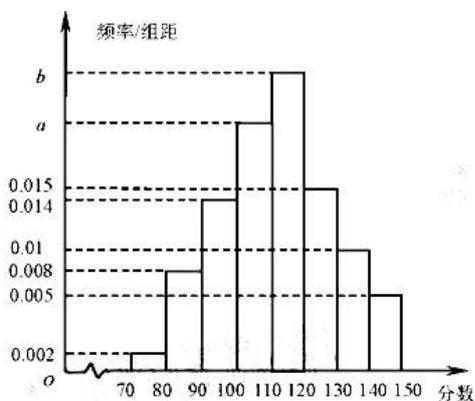
13. 已知向量 a, b 满足 $|a|=1, |b|=2, |a-b|=\sqrt{3}$, 则 $a \cdot b =$ _____.
14. 已知函数 $f(x) = \sin x + 2\cos x$, 若直线 $x = \theta$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条对称轴, 则 $\cos 2\theta =$ _____.
15. 《史记·卷六十五·孙子吴起列传第五》中记载了“田忌赛马”的故事. 齐王有上等, 中等, 下等马各一匹; 田忌也有上等, 中等, 下等马各一匹. 田忌的上等马优于齐王的中等马, 劣于齐王的上等马; 田忌的中等马优于齐王的下等马, 劣于齐王的中等马; 田忌的下等马劣于齐王的下等马. 现规定每场比赛从双方的马匹中随机各选取一匹进行比试, 若有优势的马一定获胜, 且每场比赛相互独立, 则采取三局两胜制齐王获胜的概率为 _____.
16. 已知圆 $C_1: (x+3)^2 + y^2 = 1, C_2: (x-3)^2 + y^2 = 81$, 动圆 C 与圆 C_1, C_2 都相切, 则动圆 C 的圆心轨迹 E 的方程为 _____; 直线 l 与曲线 E 仅有三个公共点, 依次为 P, Q, R , 则 $|PR|$ 的最大值为 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

哈尔滨市第三中学校响应教育部门疫情期间“停课不停学”的号召，实施网络授课，为检验学生上网课的效果，高三学年进行了一次网络模拟考试，全学年共 1500 人，现从中抽取了 100 人的数学成绩，绘制成频率分布直方图(如下图所示)。已知这 100 人中 $[110,120)$ 分数段的人数比 $[100,110)$ 分数段的人数多 6 人。



- (1) 根据频率分布直方图，求 a, b 的值，并估计抽取的 100 名同学数学成绩的中位数；
- (2) 若学年打算给数学成绩不低于 135 分的同学颁发“网络课堂学习优秀奖”，将这 100 名同学数学成绩的样本频率视为概率。
 - (i) 估计全学年的获奖人数；
 - (ii) 若从全学年随机选取 3 人，求所选 3 人中至少有 2 人获奖的概率。

18. (本小题满分 12 分)

已知公差大于 $\frac{3}{2}$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = -3$, $a_3, a_4, S_5 + 4$ 成等比数列; 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 $2^{n+1} - 2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = |a_n| \cdot b_n$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

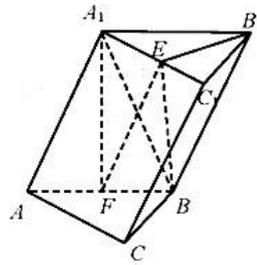
19. (本小题满分 12 分)

三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 平面 $AA_1B_1B \perp$ 平面 ABC , $AB = AA_1 = A_1B = 4$,

$BC = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$, 点 F 为棱 AB 的中点, 点 E 为线段 A_1C_1 上的动点.

(1) 求证: $EF \perp BC$;

(2) 若直线 BC 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{51}}{17}$, 求二面角 $E - BB_1 - A_1$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 上、下顶点分别为 B_1, B_2 . 四边形 $A_1B_1A_2B_2$ 的面积为 $4\sqrt{3}$, 坐标原点 O 到直线 A_1B_1 的距离为 $\frac{2}{7}\sqrt{21}$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 过椭圆 C 上一点 P 作两条直线, 分别与椭圆 C 相交于异于点 P 的点 A, B , 若四边形 $OAPB$ 为平行四边形, 探究四边形 $OAPB$ 的面积是否为定值, 若是, 求出此定值; 若不是, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = mx \ln x - (m+1) \ln x$, $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导数.

- (1) 讨论函数 $f'(x)$ 的单调性;
- (2) 若当 $m > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 与 $g(x) = \frac{3}{e} - x$ 的图象有两个交点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) (x_1 < x_2)$, 求证: $x_2 + \frac{1}{e} < x_1 + e$.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (本小题满分 10 分)

在平面直角坐标系中, 已知曲线 $C: \begin{cases} x = 2 \cos \alpha \\ y = 4 + 2 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 直线 $l:$

$$\begin{cases} x = t \cos \beta \\ y = t \sin \beta \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}),$$

直线 l 与曲线 C 相切于点 P , 以坐标原点 O

为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1) 求曲线 C 的极坐标方程及点 P 的极坐标;

(2) 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $(x - 2\sqrt{3})^2 + y^2 = 10$, 直线 l_1 的极坐标方程为

$\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho \in \mathbb{R}$), 直线 l_1 与曲线 C_1 交于 A, B 两点, 记 $\triangle POA$ 的面积为 S , $\triangle BOC_1$ 的

面积为 S' , 求 $\frac{S}{S'} + \frac{S'}{S}$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (本小题满分 10 分)

已知 $f(x) = |x - 2| - |2x - 3|$.

(1) 求不等式 $f(x) \geq -\frac{1}{2}$ 的解集;

(2) 设函数 $f(x)$ 的最大值为 m , $a, b > 0$, 且 $\frac{1}{a} + b = 2m$, 证明:

$$(a^2 - 1)\left(\frac{1}{b^2} - 1\right) \geq 9.$$

关于我们

自主招生在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（<http://www.zizzs.com/>）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

