长郡中学2023届模拟试卷(一)

数学参考答案

一、二、选择题

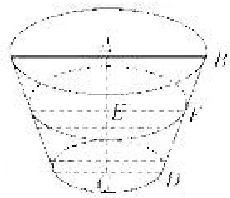
题　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答　案	B	C	B	D	A	C	B	A	BCD	BC	AC	ABD

1. B 【解析】集合 A,B 都是数集,$A=\mathbf{R}$,$B=\{y|y\geqslant 0\}$,则 $A\cap B=\{y|y\geqslant 0\}$,故选 B.

2. C 【解析】根据正态分布的 3σ 原则,$\mu=60$,$\sigma=2$,合格的内径尺寸范围是(54,66),则甲同学测量正确,乙同学测量错误,故选 C.

3. B 【解析】$x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi]$,而 $f(-x)=-x-\frac{\sin(-x)}{(-x)^3}=-x-\frac{\sin x}{x^3}\neq f(x)$,且 $f(-x)\neq -f(x)$,即函数 $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数,其图象关于原点、y 轴不对称,排除 C、D;而 $f(\pi)=\pi$,排除 A,故选 B.

4. D 【解析】由已知天池盆上底面半径是 14 寸,下底面半径是 6 寸,高为 18 寸,由积水深 9 寸知水面半径为$\frac{1}{2}\times(14+6)=10$ 寸,则盆中水体积为$\frac{1}{3}\pi\times 9\times(6^2+10^2+6\times 10)=588\pi$(立方寸),所以平地降雨量为$\frac{588\pi}{\pi\times 14^2}=3$(寸),故选 D.



5. A 【解析】该地区中学生每天睡眠时间的平均数为:[illegible](小时),该地区中学生每天睡眠时间的方差为:[illegible],故选 A.

6. C 【解析】∵[illegible],∴$m=$[illegible],$n=$[illegible],即$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=$[illegible]$=1$,即 $m+n=mn$[illegible].

对于 A,∵$m+n=mn<\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$,∴$m+n>4$,成立.

对于 B,∵$mn=m+n>2\sqrt{mn}$,∴$mn>4$,成立.

对于 C,∵$m+n>4$,∴$16<(m+n)^2=m^2+n^2+2mn<2(m^2+n^2)$,即 $m^2+n^2>8$.

对于 D,∵$(m-1)^2+(n-1)^2=(m-n)^2+2>2$,成立. 故选 C.

7. B 【解析】∵$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\sin(2\alpha+\beta)=2\sin\beta$,

∴$\sin[(\alpha+\beta)+\alpha]=2\sin[(\alpha+\beta)-\alpha]$,$\tan\alpha>0$,$\tan\beta>0$,

∴$\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=2[\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha]$,

即 $3\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha=\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha$,∴$\tan(\alpha+\beta)=3\tan\alpha$,

即 $\tan\beta=\tan[(\alpha+\beta)-\alpha]=\frac{\tan(\alpha+\beta)-\tan\alpha}{1+\tan(\alpha+\beta)\tan\alpha}$,

所以 $\tan\beta=\frac{2\tan\alpha}{1+3\tan^2\alpha}=\frac{2}{\frac{1}{\tan\alpha}+3\tan\alpha}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{\tan\alpha}\cdot 3\tan\alpha}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,

当且仅当$\frac{1}{\tan\alpha}=3\tan\alpha$,即 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$时,等号成立,$\tan\beta$取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.

8. A 【解析】设半焦距为 c,延长 F_2M 交 PF_1 于点 N,由于 PM 是$\angle F_1PF_2$ 的平分线,$F_2M\perp PM$,

所以$\triangle NPF_2$ 是等腰三角形,所以$|PN|=|PF_2|$,且 M 是 NF_2 的中点.

根据双曲线的定义可知$|PF_1|-|PF_2|=2a$,即$|NF_1|=2a$,由于 O 是 F_1F_2 的中点,

所以 MO 是 $\triangle NF_1F_2$ 的中位线，所以 $|MO|=\frac{1}{2}|NF_1|=a=\sqrt{2}$，又双曲线的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，

所以 $c=\sqrt{3}$，$b=1$，所以双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$.

所以 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，双曲线 C 的渐近线方程为 $x\pm\sqrt{2}y=0$，

设 $T(u,v)$，T 到两渐近线的距离之和为 S，则 $S=\frac{|u+\sqrt{2}v|}{\sqrt{3}}+\frac{|u-\sqrt{2}v|}{\sqrt{3}}$，

由 $\overrightarrow{F_1T}\cdot\overrightarrow{F_2T}=(u-\sqrt{3})(u+\sqrt{3})+v^2=u^2+v^2-3=5$，即 $u^2+v^2=8$，

又 T 在 C：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 上，则 $\frac{u^2}{2}-v^2=1$，即 $u^2-2v^2=2$，解得 $u^2=6$，$v^2=2$，

由 $|u|>\sqrt{2}|v|$，故 $S=\frac{2|u|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{2}$，即距离之和为 $2\sqrt{2}$. 故选 A.

9. BCD 【解析】对于 A，$z^2=a^2-b^2+2abi$，不一定为实数；

对于 B，$|z^2|=a^2+b^2\in\mathbf{R}$；

对于 C，$(z+1)(\bar{z}+1)=z\cdot\bar{z}+z+\bar{z}+1=a^2+b^2+2a+1\in\mathbf{R}$；

对于 D，$(z-\bar{z})\cdot i^{2023}=2bi^{2024}=2b(i^4)^{506}=2b\in\mathbf{R}$. 故选 BCD.

10. BC 【解析】设点 $P(x,y)$，依题意得 $[(x+2)^2+y^2][(x-2)^2+y^2]=25$，

对于 A，$25=[(x+2)^2+y^2][(x-2)^2+y^2]\geqslant(x+2)^2(x-2)^2=(x^2-4)^2$，当且仅当 $y=0$ 时取等号，解不等式 $(x^2-4)^2\leqslant25$，得 $-3\leqslant x\leqslant3$，即点 P 的横坐标的取值范围是 $[-3,3]$，则 A 错误；

对于 B，$[(x^2+y^2+4)+4x][(x^2+y^2+4)-4x]=25$，则 $x^2+y^2+4=\sqrt{25+16x^2}$，显然 $0\leqslant x^2\leqslant9$，因此 $|OP|$ [illegible]，B 正确；

对于 C，$\triangle PMN$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|PM|\cdot|PN|\sin\angle MPN\leqslant\frac{1}{2}|PM|\cdot|PN|$ [illegible]，当且仅当 $\angle MPN=$ [illegible] 时取等号，当 $\angle MPN=$ [illegible] 时，点 P 在以线段 MN 为直径的圆 [illegible] 上，由 [illegible] 解得 [illegible]，所以 $\triangle PMN$ 面积的最大值为 [illegible]，C 正确；

对于 D，点 [illegible] 在动点 P 的轨迹上，当点 P 为此点时，$|PM|+|PN|=$ [illegible]，D 错误. 故选 BC.

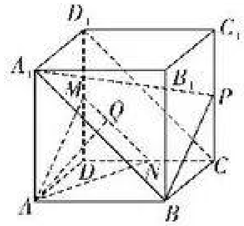
11. AC 【解析】显然 [illegible]，A 正确；B 错误；

对于 C，$f'(x)=\sin x+x\cos x$，$f''(x)=2\cos x-x\sin x$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$f''(x)<0$，则 $f'(x)$ 单调递减，又 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$，$f'(\pi)=-\pi<0$，故 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上只有一个解，C 正确；

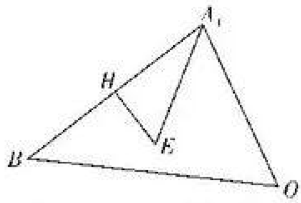
对于 D，设切点为 $P(t,f(t))$，则切线方程为 $y-t\sin t=(\sin t+t\cos t)(x-t)$，代入 $(0,0)$，有 $t^2\cos t=0$，得 $t=0$ 或 $t=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$. 若 $t=0$，则切线方程为 $y=0$；若 $t=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，则切线方程为 $y=\pm x$，故有且仅有 3 条切线，D 错误. 故选 AC.

12. ABD 【解析】对于 A，因为 $\overrightarrow{DQ}=\lambda\overrightarrow{DC}+\mu\overrightarrow{DD_1}$ $(\lambda\in[0,1],\mu\in[0,1])$，$\lambda+\mu=1$，所以 Q,C,D_1 三点共线，即点 Q 在 CD_1 上，因为 $CD_1/\!/A_1B$，$CD_1\not\subset$ 平面 A_1BP，$A_1B\subset$ 平面 A_1BP，所以 $CD_1/\!/$ 平面 A_1BP，所以点 Q 到平面 A_1BP 的距离为定值，因为 $\triangle A_1BP$ 的面积为定值，所以四面体 A_1BPQ 的体积为定值，A 正确；

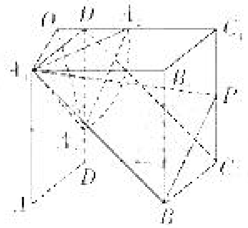
对于 B，取 DD_1，DC 的中点分别为 M,N，连接 AM,MN,AN，则 $AM/\!/BP$，因为 $AM\not\subset$ 平面 A_1BP，$BP\subset$ 平面 A_1BP，所以 $AM/\!/$ 平面 A_1BP，因为 $MN/\!/CD_1$，$A_1B/\!/CD_1$，所以 $MN/\!/A_1B$，因为 $MN\not\subset$ 平面 A_1BP，$A_1B\subset$ 平面 A_1BP，所以 $MN/\!/$ 平面 A_1BP，因为 $MN\cap AM=M$，$MN,AM\subset$ 平面 AMN，所以平面 $AMN/\!/$ 平面 A_1BP，因为 $AQ/\!/$ 平面 A_1BP，所以 $AQ\subset$ 平面 AMN，又 Q 在平面 CDD_1C_1 上，故点 Q 在线段 MN 上，所以当 $AQ\perp MN$ 时，AQ 最小，因为 $\angle BAD=60^\circ$，$AB=AD=AA_1=2$，所以 $AM=\sqrt{5}$，$MN=\sqrt{2}$，$AN=\sqrt{AD^2+DN^2-2AD\cdot DN\cos120^\circ}=\sqrt{4+1-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{7}$，所以 $AM^2+MN^2=AN^2$，所以 Q,M 重合，所以 AQ 的最小值为 $\sqrt{5}$，B 正确；



对于 C，若$\triangle A_1BQ$的外心为 E，过 E 作 $EH\perp A_1B$ 于 H，因为$|\overrightarrow{A_1B}|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，所以$\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{A_1E}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A_1B}^2=4$，C 错误；



对于 D，过 A_1 作 $A_1O\perp C_1D_1$ 于点 O，因为 $DD_1\perp$平面 $A_1B_1C_1D_1$，$A_1O\subset$平面 $A_1B_1C_1D_1$，所以 $DD_1\perp A_1O$，因为 $C_1D_1\cap DD_1=D_1$，C_1D_1，$DD_1\subset$平面 DD_1C_1C，所以 $A_1O\perp$平面 DD_1C_1C，$OD_1=A_1D_1\cos\frac{\pi}{3}=1$，在 DD_1，D_1C_1 上取点 A_3，A_2，使得 $D_1A_3=\sqrt{3}$，$D_1A_2=1$，则 $A_1A_3=A_1A_2=\sqrt{7}$，$OA_3=OA_2=\sqrt{7-3}=2$，所以若 $A_1Q=\sqrt{7}$，则 Q 在以 O 为圆心，2 为半径的圆弧$\overset{\frown}{A_2A_3}$上运动，因为 $D_1O=1$，$D_1A_3=\sqrt{3}$，所以$\angle A_3OA_2=\frac{\pi}{3}$，则圆弧$\overset{\frown}{A_2A_3}$等于$\frac{2\pi}{3}$，D 正确。故选 ABD.



三、填空题

13. -1 【解析】∵$\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,t)$，故可得$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,2+t)$，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{9+(2+t)^2}$，

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-1,2-t)$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{1+(2-t)^2}$，

∵$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，即$\sqrt{9+(2+t)^2}=\sqrt{1+(2-t)^2}$，整理得 $8t=-8$，解得 $t=-1$.

14. 2 【解析】因为$(x+a)^9=a_0+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_9(x+1)^9$，

将原式变形为$[(x+1)+a-1]^9$，通项为 $T_{r+1}=C_9^r(x+1)^{9-r}(a-1)^r$，

$a_5=126$ 对应$(x+1)^5$ 的系数，故得到 $9-r=5$，$r=4$，系数为 $C_9^4(a-1)^4=126\Rightarrow a=0$ 或 2，故正实数 a 的值为 2.

15. $\frac{8}{3}$ 【解析】函数 $y=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,\varphi\in(0,2\pi))$的对称轴可以表示为 $x=\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，$f(x)$在$\left(\pi,\frac{4\pi}{3}\right)$

上单调，则∃$k\in\mathbf{Z}$，使得$\begin{cases}\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6}\leqslant\pi,\\ \frac{(k+1)\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6}\geqslant\frac{4\pi}{3},\end{cases}$解得$\frac{6}{7}k\leqslant\omega\leqslant\frac{2}{3}(k+1)$，由$\frac{6}{7}k\leqslant\frac{2}{3}(k+1)$，得 $k\leqslant3$，当 $k=3$ 时，

ω 的最大值为$\frac{8}{3}$.

16. 4 $1+\frac{\sqrt{3}}{2}$(第一空 2 分，第二空 3 分)

【解析】不妨设 P 在第一象限，$PF_1=m$，$PF_2=n$，则 $m+n=2a_1$，$m-n=2a_2$，∴$m=a_1+a_2$，$n=a_1-a_2$，

在$\triangle F_1PF_2$ 中，$4c^2=m^2+n^2-mn=(a_1+a_2)^2+(a_1-a_2)^2-(a_1+a_2)(a_1-a_2)$，

即 $4c^2=a_1^2+3a_2^2$，∴$\frac{1}{e_1^2}+\frac{3}{e_2^2}=\frac{a_1^2+3a_2^2}{c^2}=4$.

由$\overrightarrow{AI}=\lambda\overrightarrow{IP}$，∴$\lambda=\frac{AI}{IP}=\frac{F_1A}{F_1P}=\frac{F_2A}{F_2P}=\frac{F_1A+F_2A}{F_1P+F_2P}=\frac{2c}{2a_1}=e_1$，

由$\overrightarrow{GP}\cdot\overrightarrow{IP}=0$，知 $PA\perp PB$，又 PA 平分$\angle F_1PF_2$，可得出 PB 是$\angle F_1PF_2$ 的外角平分线，又$\overrightarrow{BG}=\mu\overrightarrow{GP}$，

$\therefore \mu=\dfrac{BG}{GP}=\dfrac{BF_1}{PF_1}=\dfrac{BF_2}{PF_2}=\dfrac{BF_1-BF_2}{PF_1-PF_2}=\dfrac{2c}{2a_2}=e_2$，

$\therefore \lambda^2+\mu^2=e_1^2+e_2^2=\dfrac{1}{4}(e_1^2+e_2^2)\left(\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{3}{e_2^2}\right)=\dfrac{1}{4}\left(1+3+\dfrac{e_2^2}{e_1^2}+\dfrac{3e_1^2}{e_2^2}\right)\geqslant\dfrac{1}{4}(4+2\sqrt{3})=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

当且仅当 $e_2^2=\sqrt{3}e_1^2$ 取得最小值.

故最小值为 $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

四、解答题

17.**【解析】**(1)由 $A+B+C=\pi$，得 $4\sin A\cos A+\sin(\pi+B-A)=\sin(\pi-A-B)$，

即 $4\sin A\cos A+\sin(A-B)=\sin(A+B)$，

即 $2\sin A\cos A=\cos A\sin B$，………………………………………………………… 2 分

当 $\cos A=0$ 时，$A=\dfrac{\pi}{2}$，$B=\dfrac{\pi}{6}$，得 $a=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$；………………………………………………… 3 分

当 $\cos A\neq0$ 时，$\sin B=2\sin A$，由正弦定理得 $b=2a$，联立$\begin{cases}a^2+b^2-ab=4,\\ b=2a,\end{cases}$解得 $a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，$b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

故三角形的面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………… 5 分

(2)**法一**：由余弦定理可得：$a^2+b^2-ab=4$，

由$(a+b)^2=4+3ab\leqslant 4+3\dfrac{(a+b)^2}{4}$得 $a+b\leqslant 4$，当且仅当 $a=b$ 取等号.

又 $a+b>c$，即 $a+b>2$，$\therefore 4<a+b+c\leqslant 6$.

即$\triangle ABC$周长的取值范围是(4,6]. ………………………………………………… 10 分

法二：$\because C=\dfrac{\pi}{3}$，$\therefore A+B=\dfrac{2\pi}{3}$，$\therefore B=\dfrac{2\pi}{3}-A$，$A\in\left(0,\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

$\triangle ABC$ 中，由正弦定理有 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{2}{\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

$\therefore a+b+c=2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B)=2+\dfrac{4}{\sqrt{3}}\left[\sin A+\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-A\right)\right]$

$=2+4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A\right)=2+4\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\because \dfrac{\pi}{6}<A+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{5\pi}{6}$，

$\therefore \dfrac{1}{2}<\sin\left(A+\dfrac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$，$\therefore 4<a+b+c\leqslant 6$.

即$\triangle ABC$ 周长的取值范围是(4,6]. ………………………………………………… 10 分

说明：未分 $\cos A=0$，扣 1 分.

18.**【解析】**(1)$\because AD\parallel BC$，$AB\perp BC$，$BC=AB=2$，$AD=3$，

$\therefore OC=\sqrt{5}$，$OD=\sqrt{10}$，$CD=\sqrt{5}$，$OD^2=OC^2+DC^2$，

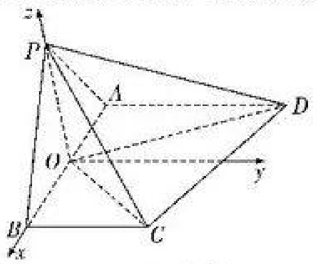
由勾股定理逆定理，$\therefore OC\perp CD$，又平面 $POC\perp$平面 $ABCD$，

又平面 $POC\cap$平面 $ABCD=OC$，$\therefore CD\perp$平面 POC，又 $PO\subset$平面 POC，

$\therefore CD\perp PO$，$\because PA=PB=AB$，O 为 AB 的中点，$\therefore PO\perp AB$，又 AB，CD 相交，$\therefore PO\perp$平面 $ABCD$，

$\because PO\subset$平面 PAB，$\therefore$平面 $PAB\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………………… 5 分

(2)如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$，则 $P(0,0,\sqrt{3})$，$D(-1,3,0)$，$C(1,2,0)$，



$\therefore\overrightarrow{OP}=(0,0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{OD}=(-1,3,0)$，$\overrightarrow{CP}=(-1,-2,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{CD}=(-2,1,0)$.

设平面 OPD 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2$

则由 $\begin{cases}\overrightarrow{OP}\cdot \boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{OD}\cdot \boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}\sqrt{3}z_1=0,\\ -x_1+3y_1=0,\end{cases}$ 取 $y_1=1$，得 $x_1=3$，$z_1=0$，即 $\boldsymbol{m}=(3,1,0)$，

由 $\begin{cases}\overrightarrow{CP}\cdot \boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot \boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}-x_2-2y_2+\sqrt{3}z_2=0,\\ -2x_2+y_2=0,\end{cases}$ 取 $x_2=\sqrt{3}$，得 $y_2=2\sqrt{3}$，$z_2=5$，

即 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},2\sqrt{3},5)$，$\therefore \cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{10}\sqrt{40}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，

显然二面角 $O-PD-C$ 为锐角，故二面角 $O-PD-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. …………………………………… 12 分

19.【解析】(1)该选手选择方式二答题，记每轮得分为 X，则 X 可取值为 0，20，30，

且 $P(X=0)=C_3^0\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$，$P(X=20)=C_3^1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{3}{8}$，

$P(X=30)=C_3^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2}+C_3^3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{2}$.

记预赛得分为 Y，

$P(Y\geqslant100)=P(Y=120)+P(Y=110)+P(Y=100)=C_4^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+C_4^3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{3}{8}+C_4^2\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times\left(\dfrac{3}{8}\right)^2$

$=\dfrac{59}{128}$.

所以该选手选择方式二答题晋级的概率为 $\dfrac{59}{128}$. …………………………………… 5 分

(2)①该选手选择方式一答题：

设每轮得分为 ξ，则 ξ 可取值为 0，20，

且 $P(\xi=0)=(1-p)^2$，$P(\xi=20)=1-P(\xi=0)=2p-p^2$，

$\therefore E(\xi)=20p(2-p)$.

设预赛得分为 Y_1，

则 $Y_1=6\xi$，$E(Y_1)=E(6\xi)=6E(\xi)=120p(2-p)$. …………………………………… 8 分

②该选手选择方式二答题：

设每轮得分为 ζ，则 ζ 可取值为 0，20，30，

且 $P(\zeta=0)=(1-p)^2$，$P(\zeta=20)=p(1-p)$，$P(\zeta=30)=p(1-p)+p^2$，

$\therefore E(\zeta)=$ [illegible] $p(1-p)+30$ [illegible] $=30p(2-p)$，

设预赛得分为 Y_2，

则 $Y_2=4\zeta$，$E(Y_2)=E(4\zeta)=4E(\zeta)=120p(2-p)$.

因为 $E(Y_1)=E(Y_2)$，

所以该选手选择两种方式答题的得分期望相等. …………………………………… 12 分

20.【解析】(1)当 $n\geqslant2$ 时，$a_n-4a_{n-1}=-\dfrac{4^n}{n(n-1)}$，两边同除 4^n 后得

$\dfrac{a_n}{4^n}-\dfrac{a_{n-1}}{4^{n-1}}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n-1}$，

$\dfrac{a_{n-1}}{4^{n-1}}-\dfrac{a_{n-2}}{4^{n-2}}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n-2}$，

…

$\dfrac{a_2}{4^2}-\dfrac{a_1}{4}=\dfrac{1}{2}-1$，

上式累加得 $\dfrac{a_n}{4^n}=\dfrac{1}{n}$，$\therefore a_n=\dfrac{4^n}{n}$，

又 $n=1$ 时，$a_1=4$ 满足该式，故 $a_n=\dfrac{4^n}{n}$. …………………………………… 6 分

(2)由 $b_n=na_n-1=4^n-1$，$\therefore b_n=4\cdot4^{n-1}-1=3\cdot4^{n-1}+4^{n-1}-1\geqslant3\cdot4^{n-1}$，

$\therefore \dfrac{1}{b_n}\leqslant\dfrac{1}{3\cdot4^{n-1}}$，

当 $n=1$ 时，$\dfrac{1}{b_1}=\dfrac{1}{3}<\dfrac{4}{9}$，

当 $n\geqslant2$ 时，$\dfrac{1}{b_1}+\dfrac{1}{b_2}+\cdots+\dfrac{1}{b_n}<\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots+\dfrac{1}{4^{n-1}}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1\cdot\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)}{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{4}{9}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)<\dfrac{4}{9}$. …………………………………… 12 分

21.【解析】(1)法一：由抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 过点 $C(1,2)$，得 $p=2$，∴抛物线 $E:y^2=4x$，

设 $A\left(\frac{y_0^2}{4},y_0\right)(y_0\neq 2)$，$k_{AC}=\frac{y_0-2}{\frac{y_0^2}{4}-1}=\frac{4}{y_0+2}$，

∴直线 $AC:y-2=\frac{4}{y_0+2}(x-1)$，即 $y=\frac{4}{y_0+2}x+\frac{2y_0}{y_0+2}$，

与 $y=x+3$ 联立解得交点 $P\left(\frac{-y_0-6}{y_0-2},\frac{2y_0-12}{y_0-2}\right)$，

∴$B\left(\frac{(y_0-6)^2}{(y_0-2)^2},\frac{2y_0-12}{y_0-2}\right)$，

当 $y_0^2\neq 12$ 时，$\frac{y_0^2}{4}\neq\frac{(y_0-6)^2}{(y_0-2)^2}$，直线 AB 的方程为 $y-y_0=\frac{y_0-2}{\frac{y_0^2}{4}-3}\left(x-\frac{y_0^2}{4}\right)$，

即 $y-y_0=\frac{y_0-2}{y_0^2-12}(4x-y_0^2)$，即 $y_0-y=\frac{y_0-2}{y_0^2-12}(y_0^2-4x)$ 过定点 $Q(3,2)$；

当 $y_0^2=12$ 时，$A(3,y_0)$，$B\left(3,\frac{2y_0-12}{y_0-2}\right)$，直线 AB 过定点 $Q(3,2)$.

即直线 AB 过定点 $Q(3,2)$. ………………………………………………………… 7 分

法二：由抛物线 $E:y^2=2px(p>0)$ 过点 $C(1,2)$，得 $p=2$，∴抛物线 $E:y^2=4x$，

设直线 $AB:x=my+t$，与抛物线方程联立得：$y^2-4my-4t=0$，$\Delta>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=4m$，$y_1y_2=-4t$，又 $P(y_2-3,y_2)$，

∵直线 AP 过定点 $C(1,2)$，∴$\frac{y_2-2}{y_2-3-1}=\frac{y_1-2}{x_1-1}$，

∵x_1 [illegible]

∴ [illegible]

即 [illegible] 对任意 y_2 [illegible] 都成立，

∴ [illegible]，即 $t=$ [illegible]，

∴直线 AB:[illegible]

即直线 AB 过定点 Q [illegible] ………………………………………………………… 7 分

(2)由(1)AB:[illegible]，联立 [illegible]，消去 x，

得 [illegible]，则 [illegible]

∴S [illegible]

∴当 m [illegible] 时，[illegible] 面积的最小值为 [illegible] ………………………… 12 分

22.【解析】(1)由 [illegible]

①若 $a\geqslant 0$，则 $f'(x)>0$，∴$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

②若 $a<0$，令 $f'(x)>0$，则 $0<x<\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$，令 $f'(x)<0$，则 $x>\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}$，

∴$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{-1-\sqrt{1-4a}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减. …………………… 4 分

(2)有 $x_0>x_1$. ………………………………………………………………………… 5 分

证明：由 $g'(x)=\ln x-\frac{1}{x^2}+a(x>0)$，设 $h(x)=\ln x-\frac{1}{x^2}+a$，

则 $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}>0$，∴$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $g'(1)=a-1>0$，$g'\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2-4+a<0$，

∴存在 $x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $g'(x_2)=0$，∴$g(x)$ 在 $(0,x_2)$ 单调递减，在 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，

∴x_2 为 $g(x)$ 的极小值点，故 $x_2=x_1$. ……………………………………………… 8 分

由 $g'(x_2)=0$，$x_1=x_2$，∴$\ln x_1-\frac{1}{x_1^2}+a=0$，∴$a=\frac{1}{x_1^2}-\ln x_1$，

∴$f(x_1)=\ln x_1+ax_1-\frac{1}{x_1}=\ln x_1+x_1\left(\frac{1}{x_1^2}-\ln x_1\right)-\frac{1}{x_1}=(1-x_1)\ln x_1$，

又 $x_1=x_2\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，∴$f(x_1)=(1-x_1)\ln x_1<0=f(x_0)$，

由(1)知 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，∴$x_0>x_1$. …………………………… 12 分

关于我们