景德镇市 2023 届高三第二次质检试题

数 学（理科）答案

一、选择题 1-5 DDABC 6-10 BDCAD 11-12 DB

二、填空题 13. 0.4 14. $2\sqrt{2}+2$ 15. $[\frac{23}{6},\frac{13}{3})$

16. 解：由函数性质知 $f^2(x)=f(2x)$

$\therefore (x+1)^2 \ge (2x)^2$ $\therefore x\in[-\frac{1}{3},1]$

三、解答题

17. 解：(1) $\because \sin C\tan B=\cos C-2\cos A$ $\therefore \sin C\sin B=\cos B\cos C-2\cos B\cos A$

$\therefore 2\cos B\cos A=\cos B\cos C-\sin C\sin B=\cos(B+C)=-\cos A$ $\because$ 角 A 为锐角

$\therefore \cos A\ne 0$ $\therefore \cos B=-\frac{1}{2}$ $\therefore B=\frac{2\pi}{3}$

(2) $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$ $\therefore ac=4$

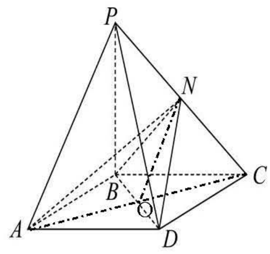
由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2+ac\ge 3ac=12$

$\therefore b$ 的最小值为 $2\sqrt{3}$

18. (1)证明：$AB\perp PB$

(2)若 PA // 平面 BDN，求平面 ABN 与平面 ADN 所成夹角的余弦值

解：(1)证明：$\begin{cases} 面PBD\perp 面ABCD \\ BD=面PBD\cap 面ABCD \\ PB\perp BD, PB\subseteq 平面PBD \end{cases}$



$\Rightarrow PB\perp 平面ABCD \Rightarrow PB\perp AB$

(2)连接 AC 交 BD 于点 O,连接 ON

$PA//平面BDN \Rightarrow PB//ON$,O 为中点，则 N 也为 PC 中点

$AB\perp PB, \Rightarrow CD\perp PB$

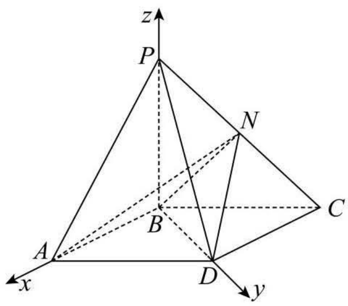
$CD\perp PD \Rightarrow CD\perp 面PBD \Rightarrow CD\perp BD$

BA、BD、BP 两两垂直，

∴以 B 为原点，以 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立空间直角坐标系，如图所示，

则 $B(0,0,0), D(0,\sqrt{3},0), P(0,0,2), C(-1,\sqrt{3},0), A(1,0,0)$，

$N\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$



∴ $\overrightarrow{BN}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{BA}=(1,0,0)$，

面ABN的法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$

$\begin{cases} -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{n}=(0,2,-\sqrt{3})$

$\overrightarrow{AD}=(-1,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{AN}=(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$，面$ADN$的法向量为$\vec{m}=(x,y,z)$

$\begin{cases} -\frac{3}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0 \\ -x+\sqrt{3}y=0 \end{cases} \Rightarrow \vec{m}=(\sqrt{3},1,\sqrt{3})$，

$\Rightarrow \vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}||\vec{n}|\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=-\frac{1}{7}$

平面 ABN 与平面 ADN 所成.夹角的余弦值 $\frac{1}{7}$

19. 解：(1) A 队踢完三场比赛后积分不少于 6 分　∴ A 队三场比赛中至少胜两场

$P=(0.4)^3+C_3^1\times(0.4)^2\times0.6=0.352$

(2) 六场比赛比完后四支球队积分总和最少 12 分，最多 18 分

∴四支球队积分相同，可能同积 3 分或同积 4 分

①若同积 3 分，则六局皆平　$P_1=(0.2)^6=0.000064$

②若同积 4 分，则每支球队均一胜一平一负，若 A 胜 B，平 C，负 D，

则 B 胜 C，B 平 D，C 胜 D

$P_1=6\times(0.4)^4\times(0.2)^2=0.006144$

综上所诉：四支球队比完后积分相同的概率为 $P=P_1+P_2=0.006208$

20. 【详解】(1)当倾斜角为时，直线 l 为，

令 $x=0$，得 $y=3$.即椭圆的上顶点为 $(0,3)$，所以 $b=3$，

又 $\triangle AF_1F_2$ 的周长为 6，即 $2a+2c=6$，又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=2,c=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

(2)由 (1) 可知 $M(-2,0),N(2,0),F_2(1,0)$，

因为过 F_2 与圆 E 相切的直线分别切于 N,H 两点，所以 $|F_2H|=|F_2N|=1$，

所以 $|PF_1|+|PH|=|PF_1|+|PF_2|-|F_2H|=|PF_1|+|PF_2|-1$，

设点 $E(2,t)(t\neq0)$，则 $D(2,2t)$，圆 E 的半径为 $|t|$，

则直线 DM 的方程为 $y=\frac{2t-0}{2+2}(x+2)=\frac{t}{2}(x+2)$，

l_2 的方程设为 $x=ky+1$，则 $\frac{|2-kt-1|}{\sqrt{1+k^2}}=|t|$，化简得 $k=\frac{1-t^2}{2t}$

由$\begin{cases} y=\dfrac{t}{2}(x+2) \\ x=\dfrac{1-t^2}{2t}y+1 \end{cases}$，得$\begin{cases} y=\dfrac{6t}{3+t^2} \\ x=\dfrac{6-2t^2}{3+t^2} \end{cases}$，所以点$P(\dfrac{6-2t^2}{3+t^2},\dfrac{6t}{3+t^2})$

$\dfrac{(\frac{6-2t^2}{3+t^2})^2}{4}+\dfrac{(\frac{6t}{3+t^2})^2}{3}=\dfrac{t^4+6t^2+9}{(3+t^2)^2}=1$，所以点$P$在椭圆$C$上，

$\therefore |PF_1|+|PF_2|=4$，即$|PF_1|+|PH|=4-1=3$.

21. 解：(1) $f'(x)=\dfrac{x+1-a-\ln x}{x^2}$，$x+1-a-\ln x\geq 0$，令$g(x)=x+1-a-\ln x$

$\therefore g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$　　$\therefore g(1)=2-a\geq 0$　　$\therefore a£2$.　　$\therefore a$的最大值为2

(2) 设$\dfrac{x_2}{x_1}=t$（$t>1$），$\therefore \begin{cases} x_1+1-a-\ln x_1=0 \\ x_2+1-a-\ln x_2=0 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} x_1+1-a-\ln x_1=0 \\ tx_1+1-a-\ln t-\ln x_1=0 \end{cases}$

两式相减得$(t-1)x_1=\ln t$，$\therefore x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$，$x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}$

$\therefore \lambda x_1+x_2=\dfrac{(\lambda+t)\ln t}{t-1}$ 令$h(t)=\dfrac{(\lambda+t)\ln t}{t-1}$　（$t>1$）

$\therefore h'(t)=\dfrac{\lambda+t-\frac{\lambda}{t}-1-(\lambda+1)\ln t}{(t-1)^2}$

令$p(t)=\lambda+t-\dfrac{\lambda}{t}-1-(\lambda+1)\ln t$　$\therefore p'(t)=1+\dfrac{\lambda}{t^2}-\dfrac{\lambda+1}{t}=\dfrac{(t-1)(t-\lambda)}{t^2}$

$\therefore p(t)$在$(1,\lambda)$上递减，在$(\lambda,+\infty)$上递增，$\lambda=e(e-2)<e$

又$\because p(e)=e(e-2)+e-(e-2)-1-[e(e-2)+1]=0$且$p(1)=0$

$\therefore$在$(1,e)$上$p(t)<0$，即$h'(t)<0$，在$(e,+\infty)$上$p(t)>0$，即$h'(t)>0$

$\therefore h(t)$在$(1,e)$上递减，在$(e,+\infty)$上递增

$\therefore$当$t=e$时，$h(t)=\dfrac{(\lambda+t)\ln t}{t-1}$取最小值$h(e)=\dfrac{\lambda+e}{e-1}=e$

四、选做题

22. 解：(1) 由题意得曲线 C_1：$\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=\sin\alpha\end{cases}$ α 为参数) 的普通方程为 $x^2+y^2=1$.

由伸缩变换 $\begin{cases}x'=3x\\y'=2y\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\dfrac{x'}{3}\\y=\dfrac{y'}{2}\end{cases}$

代入 $x^2+y^2=1$，得 $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$.

$\therefore C_2$ 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

(2) $\because$ 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta=6\sqrt{3}$.，

$\therefore$ 直线 l 的普通方程为 $2x+\sqrt{3}y-6\sqrt{3}=0$.

设点 P 的坐标为 $(3\cos\theta,2\sin\theta)$，

则点 P 到直线 l 的距离

$$d=\frac{|2\sqrt{3}\sin\theta+6\cos\theta-6\sqrt{3}|}{\sqrt{3+4}}=\frac{2\left|2\sqrt{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)-3\sqrt{3}\right|}{\sqrt{7}}\qquad \sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=1$$

$d_{\min}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$，

所以点 P 到直线 l 距离 d 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$.

23. 已知函数 $f(x)=|x+t|+|x-2t|$， $t\in\mathbf{R}$

(1) 若 $t=1$，求不等式 $f(x)\quad 14-x^2$ 的解集.

(2) 已知 $a+b=4$，若对任意 $x\in\mathbf{R}$，都存在 $a>0$，$b>0$ 使得 $f(x)=\dfrac{4a^2+b}{ab}$，求实数 t 的取值范围.

解：(1) 若 $t=1$，则 $f(x)=|x+1|+|x-2|=\begin{cases}2x-1,(x\geqslant 2)\\3,(-1\leqslant x<2)\\1-2x,(x<-1)\end{cases}$，

当 $x\quad 2$ 时， $2x-1\quad 14-x^2$，$\therefore 2\quad x\quad 3$；

当 $-1\quad x<2$ 时，$3\quad 14-x^2$，$\therefore -1\quad x<2$；

当 $x<-1$ 时，$1-2x\quad 14-x^2$，$\therefore 1-\sqrt{14}\quad x<-1$，

综上不等式的解集为$[1-\sqrt{14},3]$；

(2)$\because f(x)\quad |(x+t)-(x-2t)|=3|t|$，

$\therefore f(x)_{\min}=3|t|$，

又$f(x)=\dfrac{4a^2+b}{ab}$，$a+b=4$，

则$\dfrac{4a}{b}+\dfrac{1}{a}=\dfrac{4a}{b}+\dfrac{a+b}{4a}\quad\dfrac{1}{4}+2\sqrt{\dfrac{4a}{b}\cdot\dfrac{b}{4a}}=\dfrac{9}{4}$，

当且仅当$4a=b$，等号成立，

所以$\dfrac{4a^2+b}{ab}\in[\dfrac{9}{4},+\infty)$，

根据题意，$\dfrac{9}{4}\quad 3|t|$，

$\therefore t$的取值范围是$(-\infty,-\dfrac{3}{4}]\cup[\dfrac{3}{4},+\infty)$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。