

长治市第二中学校 2020-2021 学年高二下学期期末考试

数学试题 (文科)

【本试卷满分 150 分，考试时间为 120 分钟】

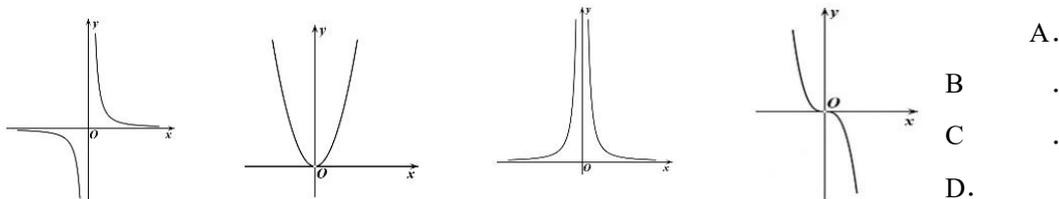
一、选择题 (本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | y = \ln(-x^2 + 9)\}$ ，集合 $B = \{y | y = |x + 1|\}$ ，则 $(C_R A) \cap B =$
A. $(-\infty, -3]$ B. $[0, 3)$ C. $(-3, 0]$ D. $[3, +\infty)$
2. 命题“ $\exists x_0 > 0, \ln x_0 < 1 - \frac{1}{x_0}$ ”的否定是
A. $\forall x \leq 0, \ln x < 1 - \frac{1}{x}$ B. $\forall x > 0, \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$
C. $\forall x \leq 0, \ln x \geq 1 - \frac{1}{x}$ D. $\forall x > 0, \ln x < 1 - \frac{1}{x}$
3. 命题 $p: \forall x \in R, x^3 < x^4$ ，命题 $q: \exists x_0 \in R$ ，使得 $2^{x_0} = \frac{1}{2}$ ，则下列判断正确的是
A. $p \wedge q$ 是真命题 B. $(\neg p) \wedge q$ 是真命题
C. $p \wedge (\neg q)$ 是真命题 D. $(\neg p) \wedge (\neg q)$ 是真命题
4. 设 $x \in R$ ，则“ $|x - 1| < 3$ ”是“ $x > -2$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知函数 $g(x) = a - \frac{2}{3^x + 1}$ ($a \in R$) 是奇函数，则函数 $g(x)$ 的值域为
A. $(-1, 1)$ B. $(-1, +\infty)$ C. $(-1, 1]$ D. $(-\infty, 1)$
6. 函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 2 + a, & x \leq 1 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x + 1), & x > 1 \end{cases}$ 有最大值，则实数 a 的范围是
A. $(-5, +\infty)$ B. $[-5, +\infty)$ C. $(-\infty, -5)$ D. $(-\infty, -5]$
7. 根据有关资料，围棋状态空间复杂度的上限 M 约为 3^{361} ，而可观测宇宙中普通物质的原子总数 N 约为 10^{80} ，则下列各数中与 $\frac{M}{N}$ 最接近的是 (参考数据: $\lg 3 \approx 0.48$)
A. 10^{33} B. 10^{53} C. 10^{73} D. 10^{93}
8. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数，且在 $(-\infty, 0]$ 上单调递增。设 $a = f(\log_4 5)$ ，

$b = f(\log_2 \frac{1}{3})$, $c = f(0.2^{0.5})$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $c < b < a$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $a < b < c$

9. 函数 $f(x) = \frac{2^x + 1}{x(2^x - 1)}$ 的部分图象大致为



10. 已知单调函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 对于定义域内任意 $x, f[f(x) - \log_2 x] = 3$, 则 $g(x) = f(x) + x - 7$ 的零点所在的区间为

- A. (1,2) B. (2,3) C. (3,4) D. (4,5)

11. 已知函数 $f(x) = |\log_2 x|$, 当 $0 < m < n$ 时, $f(m) = f(n)$, 若 $f(x)$ 在 $[m^2, n]$ 上的最大值为 2, 则 $\frac{n}{m}$ 为

- A. 4 B. 3 C. $\frac{1}{4}$ D. 2

12. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$, 给出下列命题:

①当 $x < 0$ 时, $f(x) = \frac{x+1}{e^x}$; ② $f(x) < 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$;

③函数 $f(x)$ 有 2 个零点; ④ $\forall x_1, x_2 \in R$, 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$.

其中正确的命题是

- A. ①③ B. ②③ C. ②④ D. ③④

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 函数 $f(x) = x^2 + \ln x - 2$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 _____

14. 函数 $f(x) = a^{x-m} + n - 3 (a > 0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 $(3, 2)$, 则 $m+n =$ _____

15. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期为 3 的奇函数, 且 $f(-2) = 2f(8) + 1$, 则 $f(3023)$ 的值为 _____

16. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2mx + e^{2x} - 2me^x + 2m^2$, 若存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0) \leq \frac{1}{2}$ 成立, 则实数 m 的值为 _____

三、解答题: 本大题共 70 分

17. (本小题满分 12 分)

计算: (1) $(3\frac{3}{8})^{\frac{2}{3}} - 5 \times (0.2)^{\frac{1}{2}} + (\sqrt{5} + 2)^{-1} + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^0$;

(2) $(2 + \log_3 \frac{32}{9}) \times \log_2 3 + 2 \ln \sqrt{e} + 2^{1 + \log_2 3}$.

18. (本小题满分 12 分)

已知幂函数 $f(x) = (m^2 - 2m + 2)x^{5k - 2k^2}$ ($k \in Z$) 是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若正数 a, b 满足 $2a + 3b = 7m$, 求 $\frac{3}{a+1} + \frac{2}{b+1}$ 的最小值.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 4x + a + 3, a \in R$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有零点, 求 a 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $[a, a+1]$ 上的最大值为 3, 求 a 的值.

20. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = x^n \ln x$.

(1) 令 $n = 2$, 求 $f(x)$ 的最值;

(2) 令 $n = 1$, 证明: 当 $x > 1$ 时, $f(x) < \frac{1}{2}(x^2 - 1)$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + e^x - ax$ ($a \in R$).

(1) 当 $x > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $x = x_0$ 为 $f(x)$ 的极值点, 且 $f(x_0) = -1$, 求正数 a 的值.

选考题: 共 10 分. 请考生在 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}),$$
 以坐标原点 O 为

极点, 取相同的单位长度, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta + 1 = 0$.

(1) 求直线 l 的普通方程, 曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 交于 A, B 两点, 点 Q 在 C 上运动, 求 $\triangle ABQ$ 面积的最大值.

23. (本小题满分 10 分) 【选修 4-5: 不等式选讲】

已知函数 $f(x) = |x - a| + |x + b| + c$, 其中 a, b, c 为正实数.

(1) 当 $a = b = c = 2$ 时, 求不等式 $f(x) < 10$ 的解集;

(2) 若函数 $f(x)$ 的最小值为 1, 求 $a^2 + b^2 + c^2$ 的最小值.