河北衡水中学 2021 届全国高三第二次联合考试

数学试题及参考答案

绝密★启用前

河北衡水中学 2021 届全国高三第二次联合考试

数 学

本试卷 4 页。总分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{0,2,4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,2,4\}$　　B. $\{0,2\}$

C. $\{x|0\leqslant x\leqslant 4\}$　　D. $\{x|-1\leqslant x\leqslant 2$ 或 $x=4\}$

2. 已知复数 $z=\dfrac{3+2i}{3-2i}$，则 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 在平面直角坐标系中，O 为坐标原点，$A(4,3)$，$B(-1,\sqrt{3})$，则 $\angle AOB$ 的余弦值为

A. $\dfrac{4\sqrt{3}-3}{10}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$　　D. $\dfrac{3\sqrt{3}+4}{10}$

4. 已知 a，b 为两条不同的直线，α，β 为两个不同的平面，则下列结论正确的是

A. 若 $\alpha/\!/\beta$，$a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，则 $a/\!/b$

B. 若 $a\subset\alpha$，$b\subset\beta$，$a/\!/b$，则 $\alpha/\!/\beta$

C. 若 $\alpha\cap\beta=a$，$b\subset\beta$，$b\perp a$，则 $\alpha\perp\beta$

D. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$\alpha\perp\beta$，$a\subset\alpha$，$a\perp l$，$a/\!/b$，则 $b\perp\beta$

5. 在五边形 $ABCDE$ 中，$\overrightarrow{EB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，$M$，$N$ 分别为 AE，BD 的中点，则 $\overrightarrow{MN}=$

A. $\dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{3}\boldsymbol{b}$　　C. $\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\dfrac{3}{4}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{4}\boldsymbol{b}$

6. 命题 p：关于 x 的不等式 $ax^2+ax-x-1<0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 的一个充分不必要条件是

A. $a\leqslant -1$　　B. $a>0$　　C. $-2<a<0$　　D. $a<-2$

7. 面对全球蔓延的疫情，疫苗是控制传染的最有力技术手段，科研攻关组第一时间把疫苗研发作为重中之重，对灭活疫苗、重组蛋白疫苗、腺病毒载体疫苗、减毒流感病毒载体疫苗和核酸疫苗 5 个技术路线并行研发，组织了 12 个优势团队进行联合攻关，其中有 5 个团队已经依据各自的研究优势分别选择了灭活疫苗、重组蛋白疫苗、腺病毒载体疫苗、减毒流感病毒载体疫苗和核酸疫苗这 5 个技术路线，其余团队作为辅助技术支持进驻这 5 个技术路线，若保障每个技术路线至少有两个研究团队，则不同的分配方案的种数为

A. 14 700　　B. 16 800　　C. 27 300　　D. 50 400

8. 若不等式 $m\cos x-\cos 3x-\frac{1}{8}\leqslant 0$ 对任意 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是

A. $\left(-\infty,-\frac{9}{4}\right]$ B. $\left(-\infty,-2\right]$ C. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$ D. $\left(-\infty,\frac{9}{8}\right]$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 已知 $0<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}b<1$，则下列说法正确的是

A. $1>a^2>b^2>\frac{1}{4}$

B. $2>\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>1$

C. $\frac{a}{b-1}>\frac{b}{a-1}$

D. $\frac{1}{\sqrt{e}}>e^{-b}>e^{-a}>\frac{1}{e}$

10. 将函数 $f(x)=2\cos x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，再将得到的图象向左平移 π 个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法正确的有

A. $g(x)$ 为奇函数

B. $g(x)$ 的周期为 4π

C. $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $g(x+\pi)=g(\pi-x)$

D. $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递增，且最小值为 $-\sqrt{3}$

11. 提丢斯·波得定律是关于太阳系中行星轨道的一个简单的几何学规则，它是在 1766 年由德国的一位中学老师戴维斯·提丢斯发现的，后来被柏林天文台的台长波得归纳成一条定律，即数列 $\{a_n\}$：0.4，0.7，1，1.6，2.8，5.2，10，19.6…表示的是太阳系第 n 颗行星与太阳的平均距离（以天文单位 A.U.为单位）.现将数列 $\{a_n\}$ 的各项乘以 10 后再减 4，得到数列 $\{b_n\}$，可以发现数列 $\{b_n\}$ 从第 3 项起，每项是前一项的 2 倍，则下列说法正确的是

A. 数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=3\times 2^{n-2}$

B. 数列 $\{a_n\}$ 的第 2 021 项为 $0.3\times 2^{2\,020}+0.4$

C. 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=0.4n+0.3\times 2^{n-1}-0.3$

D. 数列 $\{nb_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=3(n-1)\cdot 2^{n-1}$

12. 在一张纸上有一圆 $C:(x+2)^2+y^2=r^2(r>0)$ 与点 $M(m,0)(m\neq -2)$，折叠纸片，使圆 C 上某一点 M' 恰好与点 M 重合，这样的每次折法都会留下一条直线折痕 PQ，设折痕 PQ 与直线 $M'C$ 的交点为 T，则下列说法正确的是

A. 当 $-2-r<m<-2+r$ 时，点 T 的轨迹为椭圆

B. 当 $r=1,m=2$ 时，点 T 的轨迹方程为 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$

C. 当 $m=2,1\leqslant r\leqslant 2$ 时，点 T 的轨迹对应曲线的离心率取值范围为 $[2,4]$

D. 当 $r=2\sqrt{2},m=2$ 时，在 T 的轨迹上任取一点 S，过 S 作直线 $y=x$ 的垂线，垂足为 N，则 $\triangle SON$（O 为坐标原点）的面积为定值

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 正态分布在概率和统计中占有重要地位，它广泛存在于自然现象、生产和生活实践中，在现实生活中，很多随机变量都服从或近似服从正态分布.在某次大型联考中，所有学生的数学成绩 $X\sim N(100,225)$.若成绩低于 $m+10$ 的同学人数和高于 $2m-20$ 的同学人数相同，则整数 m 的值为________.

14. 已知抛物线 $x^2=4y$，其准线与 y 轴交于点 P，则过点 P 的抛物线的切线方程为________.

15. 在 $\triangle ABC$ 中，a,b,c 分别是内角 A,B,C 的对边，其中 $A=\frac{\pi}{3}$，$b+c=4$，M 为线段 BC 的中点，则 $|AM|$ 的最小值为________.

16. 已知四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的底面为正方形，$PA=PB=PC=PD$，$AB=2$，若四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的体积为$\frac{4}{3}$，则以点 P 为球心，以$\sqrt{2}$为半径的球的表面与四棱锥侧面 PAB 交线的长度约为_______，该四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 外接球的体积为_______.（参考数据：$\tan 35°\approx\frac{\sqrt{2}}{2}$）（本题第一空 3 分，第二空 2 分）

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

在①$\triangle ABC$ 的外接圆面积为 3π，②$\triangle ADC$ 的面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$，③$\triangle BDC$ 的周长为 $5+\sqrt{7}$ 这三个条件中任选一个，补充在下面的问题中，并给出解答.

问题：在$\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，D 是 AB 边上一点.已知 $AD=\frac{1}{3}AB$，$\sin A\sin C=\frac{3}{4}$，$\cos 2B+3\cos B=1$，若_______，求 CD 的长.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

18.（12 分）

已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_4=S_5=-20$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

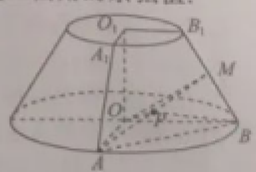
(2)已知数列$\{b_n\}$是以 4 为首项，4 为公比的等比数列，若数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的公共项为 a_m，记 m 由小到大构成数列$\{c_n\}$，求$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

如图，已知圆台 O_1O 的下底面半径为 2，上底面半径为 1，母线与底面所成的角为$\frac{\pi}{3}$，AA_1，BB_1 为母线，平面 $AA_1O_1O\perp$平面 BB_1O_1O，M 为 BB_1 的中点，P 为 AM 上的任意一点.

(1)证明：$BB_1\perp OP$；

(2)当点 P 为线段 AM 的中点时，求平面 OPB 与平面 OAM 所成锐二面角的余弦值.



20.（12 分）

国务院办公厅印发了《关于防止耕地“非粮化”稳定粮食生产的意见》，意见指出要切实稳定粮食生产，牢牢守住国家粮食安全的生命线.为了切实落实好稻谷、小麦、玉米三大谷物种植情况，某乡镇抽样调查了 A 村庄部分耕地（包含永久农田和一般耕地）的使用情况，其中永久农田 100 亩，三大谷物的种植面积为 90 亩，棉、油、蔬菜等的种植面积为 10 亩；一般耕地 50 亩，三大谷物的种植面积为 30 亩，棉、油、蔬菜等的种植面积为 20 亩.

(1)以频率代替概率，求 A 村庄每亩耕地(包括永久农田和一般耕地)种植三大谷物的概率；

(2)上级有关部门要督促落实整个乡镇三大谷物的种植情况，现从本乡镇抽测 5 个村庄，每个村庄的三大谷物的种植情况符合要求的概率均为 A 村庄每亩耕地(永久农田和一般耕地)种植三大谷物的概率.若抽测的村庄三大谷物的种植情况符合要求，则为本乡镇记 1 分，若不符合要求，记 -1 分.X 表示本乡镇的总积分，求 X 的分布列及数学期望；

(3)目前在农村的劳动力大部分是中老年人，调查中发现，80 位中老年劳动力中有 65 人种植三大谷物，其余种植棉、油、蔬菜等农作物；20 位青壮年劳动力中有 15 人种植需要技术和体力，短期收益大的棉、油、蔬菜等农作物，其余种植三大谷物.请完成下表，并判断是否有 99.9% 的把握认为种植作物的种类与劳动力的年龄层次有关?

劳动力 年龄层次	种植情况		合计
	种植三大谷物	种植棉、油、蔬菜等	
中老年劳动力			
青壮年劳动力			
合计			

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

21.(12 分)

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 $P\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 满足 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，且以线段 F_1F_2 为直径的圆过点 P.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)O 为坐标原点，若直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点，直线 OM 的斜率为 k_1，直线 ON 的斜率为 k_2，当△OMN 的面积为定值 1 时，k_1k_2 是否为定值? 若是，求出 k_1k_2 的值；若不是，请说明理由.

22.(12 分)

设函数 $f(x)=\ln x+x+\dfrac{2}{x}$，$g(x)=\dfrac{e^x}{x}$.

(1)若 $h(x)=mf(x)-g(x)$，$m\in\mathbf{R}$，试判断函数 $h(x)$ 的极值点个数；

(2)设 $\varphi(x)=x^2g(x)-f(x)-kx+2x+\dfrac{2}{x}$，若 $\varphi(x)\geqslant1$ 恒成立，求实数 k 的取值范围.

[衡中同卷] 参考答案及解析

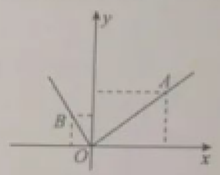
河北衡水中学 2021 届全国高三第二次联合考试 · 数学

一、选择题

1. B 【解析】集合 B 中的元素在区间 $[-1,2]$ 内的只有 $0,2$，所以 $A\cap B=\{0,2\}$.

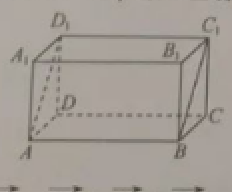
2. D 【解析】$z=\dfrac{3+2i}{3-2i}=\dfrac{(3+2i)^2}{(3-2i)(3+2i)}=\dfrac{5}{13}+\dfrac{12}{13}i$，所以 $\overline{z}=\dfrac{5}{13}-\dfrac{12}{13}i$，所以其在复平面内对应的点位于第四象限.

3. C 【解析】作出平面直角坐标系，如图.



设 $\angle xOB=\alpha$，$\angle xOA=\beta$，则 $\angle AOB=\alpha-\beta$，$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{2}$，$\sin\beta=\dfrac{3}{5}$，$\cos\beta=\dfrac{4}{5}$. 所以 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{3\sqrt{3}-4}{10}$.

4. D 【解析】对于 A，如图，在长方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，平面 $A_1B_1C_1D_1$ // 平面 $ABCD$，$A_1B_1\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$，$AC\subset$ 平面 $ABCD$，但 A_1B_1 与 AC 不平行，故 A 错误；对于 B，如图，$A_1B_1\subset$ 平面 A_1B_1BA，$DC\subset$ 平面 $ABCD$，$A_1B_1/\!/DC$，但平面 A_1B_1BA 与平面 $ABCD$ 不平行，故 B 错误；对于 C，如图，平面 $ABC_1D_1\cap$ 平面 $ABCD=AB$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，且 $BC\perp AB$，但平面 $ABCD$ 与平面 ABC_1D_1 不互相垂直，故 C 错误；对于 D，由平面与平面垂直的性质定理，得 $a\perp\beta$，又 $a/\!/b$，所以 $b\perp\beta$，故 D 正确.



5. C 【解析】$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB})+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD})=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{EB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$.

6. D 【解析】由题意知命题 p 即 $(ax-1)(x+1)<0$ 的解集为 $(-\infty,-1)\cup\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$，其充要条件为 $\begin{cases}a<0,\\-1\leqslant\dfrac{1}{a},\end{cases}$ 得 $a\leqslant-1$. 因为 $(-\infty,-2)\subsetneqq(-\infty,-1]$，所以 $a<-2$ 是 $a\leqslant-1$ 的一个充分不必要条件.

7. B 【解析】将其余的 7 个团队分成 5 个组，然后再分配给各技术路线. 第一类方案：按 3，1，1，1，1 分组，先从 7 个队中选择 3 个队，然后全排，有 $C_7^3A_5^5$ 种. 第二类方案：按 2，2，1，1，1 分组，先分组再分配，共有 $\dfrac{C_7^2C_5^2}{A_2^2}A_5^5$ 种. 综上，由分类加法计数原理知，共有 $C_7^3A_5^5+\dfrac{C_7^2C_5^2}{A_2^2}A_5^5=16\ 800$ 种分配方案.

8. A 【解析】因为 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos x\in(0,1)$，原不等式可变形为 $m\leqslant\dfrac{\cos 3x+\frac{1}{8}}{\cos x}=\dfrac{\cos(x+2x)+\frac{1}{8}}{\cos x}=\dfrac{\cos x\cos 2x-\sin x\sin 2x+\frac{1}{8}}{\cos x}=4\cos^2x+\dfrac{1}{8\cos x}-3$.

令 $t=\cos x\in(0,1)$，则 $g(t)=4t^2+\dfrac{1}{8t}-3$，$g'(t)=8t-\dfrac{1}{8t^2}=\dfrac{64t^3-1}{8t^2}=8\times\dfrac{t^3-\left(\frac{1}{4}\right)^3}{t^2}=8\times\dfrac{\left(t-\frac{1}{4}\right)\left(t^2+\frac{t}{4}+\frac{1}{16}\right)}{t^2}$. 当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{4}\right)$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减；当 $t\in\left(\dfrac{1}{4},1\right)$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增，所以 $g(t)\geqslant g\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{9}{4}$. 又 $m\leqslant g(t)_{\min}$，所以 $m\leqslant-\dfrac{9}{4}$.

二、选择题

9. ACD 【解析】已知 $0<\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}b<1$，因为 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $\dfrac{1}{2}<b<a<1$，所以 $\dfrac{1}{4}<b^2<a^2<1$，故 A 正确；因为函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，因为 $\dfrac{1}{2}<b<a<1$，所以 $2>$

$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}>1$，故 B 错误；因为 $\frac{a}{b-1}-\frac{b}{a-1}=\frac{a(a-1)-b(b-1)}{(b-1)(a-1)}=\frac{(a^2-b^2)-(a-b)}{(b-1)(a-1)}=\frac{(a-b)(a+b-1)}{(b-1)(a-1)}$，又 $\frac{1}{2}<b<a<1$，所以 $a+b>1$，$\frac{(a-b)(a+b-1)}{(b-1)(a-1)}>0$，故 C 正确；因为 $-\frac{1}{2}>-b>-a>-1$，函数 $y=e^x$ 为单调递增函数，所以 $\frac{1}{e}<e^{-a}<e^{-b}<\frac{1}{\sqrt{e}}$，故 D 正确.

10. ABC 【解析】将函数 $f(x)=2\cos x$ 图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍，纵坐标不变，得 $y=2\cos\frac{x}{2}$，再将得到的图象向左平移 π 个单位长度，得 $g(x)=2\cos\left(\frac{x+\pi}{2}\right)=-2\sin\frac{x}{2}$，$g(x)$ 为奇函数，故 A 正确；4π 为 $g(x)$ 的周期，故 B 正确；又 $g(x)=-2\sin\frac{x}{2}$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，故 C 正确；令 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{3\pi}{2}+2k\pi$，解得 $\pi+4k\pi\leqslant x\leqslant 3\pi+4k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，所以 $g(x)$ 在区间 $[\pi+4k\pi,3\pi+4k\pi]$ $(k\in\mathbf{Z})$ 上单调递增，取 $k=0$，得 $[\pi,3\pi]$，所以 $g(x)$ 在区间 $\left[-\frac{2\pi}{3},\pi\right]$ 上单调递减，在区间 $\left[\pi,\frac{4\pi}{3}\right]$ 上单调递增，所以最小值为 $g(\pi)=-2$，故 D 错误.

11. CD 【解析】数列 $\{a_n\}$ 各项乘以 10 再减 4 得到数列 $\{b_n\}$：0，3，6，12，24，48，96，192，…，故该数列从第 2 项起构成公比为 2 的等比数列，所以 $b_n=\begin{cases}0, n=1,\\ 3\times 2^{n-2}, n\geqslant 2,\end{cases}$ 故 A 错误；从而 $a_n=\frac{b_n+4}{10}=\begin{cases}0.4, n=1,\\ 0.3\times 2^{n-2}+0.4, n\geqslant 2,\end{cases}$ 所以 $a_{2021}=0.3\times 2^{2019}+0.4$，故 B 错误；当 $n=1$ 时，$S_1=a_1=0.4$；当 $n\geqslant 2$ 时，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=0.4+0.3(2^0+2^1+\cdots+2^{n-2})+0.4(n-1)=0.4n+0.3\times\frac{1-2^{n-1}}{1-2}=0.4n+0.3\times 2^{n-1}-0.3$，当 $n=1$ 时，$S_1=0.4$ 也符合上式，所以 $S_n=0.4n+0.3\times 2^{n-1}-0.3$，故 C 正确；因为 $nb_n=\begin{cases}0, n=1,\\ 3n\times 2^{n-2}, n\geqslant 2,\end{cases}$ 所以当 $n=1$ 时，$T_1=b_1=0$，当 $n\geqslant 2$ 时，$T_n=b_1+2b_2+3b_3+\cdots+nb_n=0+3(2\times 2^0+3\times 2^1+4\times 2^2+\cdots+n\times 2^{n-2})$，$2T_n=3(2\times 2^1+3\times 2^2+4\times 2^3+\cdots+n\times 2^{n-1})$，所以 $-T_n=0+3(2+2^1+2^2+\cdots+2^{n-2}-n\times 2^{n-1})=3\left(2+\frac{2-2^{n-1}}{1-2}-n\times 2^{n-1}\right)=3(1-n)\times 2^{n-1}$，所以 $T_n=3(n-1)\times 2^{n-1}$，又当 $n=1$ 时，T_1 也满足上式，所以 $T_n=3(n-1)\times 2^{n-1}$，故 D 正确.

12. ACD 【解析】当 $-2-r<m<-2+r$ 时，点 M 在圆 C 内，此时有 $|TM|+|TC|=|CM'|=r>|CM|$，故 T 的轨迹是以 C，M 为焦点的椭圆，故 A 正确；当 $r=1$，$m=2$ 时，点 M 在圆 C 外，此时有 $||TM|-|TC||=|CM'|=r<|CM|$，故 T 的轨迹是以 C，M 为焦点的双曲线，其中 $2a=r=1$，$2c=CM=4$，故双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{1}{4}}-\frac{y^2}{\frac{15}{4}}=1$，故 B 错误；当 $m=2$ 时，$1\leqslant r\leqslant 2$ 时，T 的轨迹是以 C，M 为焦点的双曲线，方程为 $\frac{x^2}{\frac{r^2}{4}}-\frac{y^2}{4-\frac{r^2}{4}}=1$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\frac{r}{2}}=\frac{4}{r}$，当 $1\leqslant r\leqslant 2$ 时，$2\leqslant e\leqslant 4$，故 C 正确；当 $r=2\sqrt{2}$，$m=2$ 时，T 的轨迹方程为 $x^2-y^2=2$，设 $S(p,q)$，则 $p^2-q^2=2$，直线 SN 的方程为 $y-q=-(x-p)$，它与 $y=x$ 的交点 N 的坐标为 $\left(\frac{p+q}{2},\frac{p+q}{2}\right)$，所以 $|ON|=\frac{\sqrt{2}}{2}|p+q|$，$|SN|=\frac{|p-q|}{\sqrt{2}}$，所以 $S_{\triangle SNO}=\frac{1}{2}\times|ON|\cdot|SN|=\frac{|p^2-q^2|}{4}=\frac{1}{2}$ 为定值，故 D 正确.

三、填空题

13. 70 【解析】由题意 $P(x<m+10)=P(x>2m-20)$，又 $X\sim N(100,225)$，所以 $m+10+2m-20=200$，所以 $m=70$.

14. $x-y-1=0$，或 $x+y+1=0$ 【解析】抛物线 $x^2=4y$ 的准线方程为 $y=-1$，所以 $P(0,-1)$，设切点坐标为 $\left(x_0,\frac{x_0^2}{4}\right)$，切线斜率为 $k=\frac{x_0}{2}=\frac{\frac{x_0^2}{4}+1}{x_0}$，解得 $x_0=\pm 2$. 当 $x_0=2$ 时，$k=1$，切线方程为 $x-y-1=0$；当 $x_0=-2$ 时，$k=-1$，切线方程为 $x+y+1=0$.

15. $\sqrt{3}$ 【解析】$|AM|=|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{c^2+b^2+bc}}{2}=\frac{\sqrt{(c+b)^2-bc}}{2}$，因为 $b+c=4\geqslant 2\sqrt{bc}$，所以 $bc\leqslant 4$，$-bc\geqslant -4$，当且仅当 $b=c=2$ 时，等号成立，所以 $\frac{\sqrt{(c+b)^2-bc}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{16-4}}{2}=\sqrt{3}$.

16. $\frac{7\sqrt{2}}{18}\pi$　$\frac{9\pi}{2}$ 【解析】因为 $AB=2$，$V_{四棱锥P\text{-}ABCD}=\frac{4}{3}$，所以四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的高 $h=1$. 易知侧面 PAB 底边 AB 的高为 $\sqrt{2}$，所以球面与侧面 PAB 的交线为弧线，

如图，且长度 $l\approx\frac{35^\circ\times2}{180^\circ}\pi\times\sqrt{2}=\frac{7\sqrt{2}}{18}\pi$，设四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 外接球的球心为 O，则 O 在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 的高线上，设外接球的半径为 R，则 $(1-R)^2+(\sqrt{2})^2=R^2$，解得 $R=\frac{3}{2}$，$V_{球O}=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9\pi}{2}$.

(侧面图)

四、解答题

17. 解：因为 $\cos 2B+3\cos B=1$，

所以 $2\cos^2B+3\cos B-2=0$，

解得 $\cos B=\frac{1}{2}$ 或 $\cos B=-2$(舍去)， (2 分)

所以在$\triangle ABC$中，$B=\frac{\pi}{3}$. (3 分)

因为 $\sin A\sin C=\frac{3}{4}=\sin^2B$，所以 $b^2=ac$. (5 分)

所以由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac$，

又 $b^2=ac$，所以 $a^2+c^2-2ac=0$，即 $a=c$，

所以$\triangle ABC$为等边三角形. (6 分)

因为 $AD=\frac{1}{3}AB$，

所以在$\triangle ADC$中，由余弦定理得 $CD=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{3}a\right)^2-a\cdot\left(\frac{1}{3}a\right)}=\frac{\sqrt{7}}{3}a$. (7 分)

选择条件①：由$\triangle ABC$的外接圆面积为 3π，得 $2R=2\sqrt{3}$，

所以 $\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}$，所以 $a=3$，故 $CD=\sqrt{7}$. (10 分)

选择条件②：由$\triangle ADC$的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$，

得$\triangle ABC$的面积为 $\frac{9\sqrt{3}}{4}$，

所以 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{9\sqrt{3}}{4}$，解得 $a=3$，故 $CD=\sqrt{7}$. (10 分)

选择条件③：由$\triangle BDC$的周长为 $5+\sqrt{7}$，

得 $a+\frac{2a}{3}+\frac{\sqrt{7}}{3}a=5+\sqrt{7}$，

所以 $a=3$，故 $CD=\sqrt{7}$. (10 分)

18. 解：(1)设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，

因为 $S_4=S_5=-20$，所以 $a_5=S_5-S_4=0$.

因为 $S_5=5a_3=-20$，所以 $a_3=-4$，

所以 $d=\frac{a_5-a_3}{5-3}=2$，

所以 $a_n=a_5+(n-5)d=2n-10$. (6 分)

(2)由题意知 $b_n=4\times4^{n-1}=4^n$，

因为 $a_m=2m-10$，所以 $2m-10=4^n$，$m=\frac{4^n+10}{2}$，

因此 $c_n=\frac{4^n+10}{2}=\frac{4^n}{2}+5$，

所以 $T_n=\frac{4^1}{2}+5+\frac{4^2}{2}+5+\frac{4^3}{2}+5+\cdots+\frac{4^n}{2}+5=\frac{\frac{4(1-4^n)}{1-4}}{2}+5n=\frac{2}{3}\times4^n+5n-\frac{2}{3}$. (12 分)

19. (1)证明：过点 B_1 作平面 AOB 的垂线，垂足为 C，

如图，则 C 是 OB 的中点，所以 $BC=1$，

又$\angle OBB_1=\frac{\pi}{3}$，所以 $BB_1=2$.

连接 OB_1，因为 $BB_1=OB=2$，

所以$\triangle OBB_1$为等边三角形.

因为点 M 为 BB_1 的中点，所以 $BB_1\perp OM$.

因为平面 $AA_1O_1O\perp$平面 BB_1O_1O，

平面 $AA_1O_1O\cap$平面 $BB_1O_1O=OO_1$，且 $AO\perp OO_1$，$AO\subset$平面 AA_1O_1O，

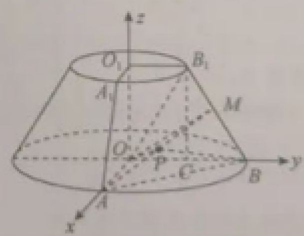
所以 $AO\perp$平面 BB_1O_1O.

因为 $BB_1\subset$平面 BB_1O_1O，所以 $AO\perp BB_1$.

又因为 $AO\cap OM=O$，$AO\subset$平面 OMA，$OM\subset$平面 OMA，

所以 $BB_1\perp$平面 OMA.

因为 $OP\subset$平面 OMA，所以 $BB_1\perp OP$. (4 分)



(2)解：以 O 为坐标原点，OA，OB，OO_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$B_1(0,1,\sqrt{3})$，$M\left(0,\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$P\left(1,\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{OP}=\left(1,\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$，$\overrightarrow{OB}=(0,2,0)$. (6 分)

设平面 OPB 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{OB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$

即 $\begin{cases}x+\frac{3}{4}y+\frac{\sqrt{3}}{4}z=0,\\2y=0,\end{cases}$

取 $z=4\sqrt{3}$，得 $x=-3$，$y=0$，

所以 $\boldsymbol{n}=(-3,0,4\sqrt{3})$.　　(9 分)

因为 $BB_1\perp$ 平面 OAM,

所以平面 OAM 的一个法向量为 $\overrightarrow{BB_1}=(0,-1,\sqrt{3})$.　　(10 分)

所以 $\cos\langle\overrightarrow{BB_1},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BB_1}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{BB_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{12}{2\times\sqrt{57}}=\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.　　(11 分)

所以平面 OAM 与平面 OPB 所成锐二面角的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{57}}{19}$.　　(12 分)

20. 解:(1)设事件 M 为"耕地(包括永久农田和一般耕地)种植三大谷物",

则 $P(M)=\dfrac{90+30}{100+50}=\dfrac{4}{5}$.

所以 A 村庄每亩耕地种植三大谷物的概率为 $\dfrac{4}{5}$.　　(3 分)

(2)由(1)知,每个村庄的三大谷物的种植情况符合要求的概率均为 $\dfrac{4}{5}$.

由题意知,X 的所有可能取值为 $-5,-3,-1,1,3,5$.

则 $P(X=-5)=\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^5=\dfrac{1}{3\,125}$,

$P(X=-3)=C_5^1\,\dfrac{4}{5}\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^4=\dfrac{4}{625}$,

$P(X=-1)=C_5^2\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^3=\dfrac{32}{625}$,

$P(X=1)=C_5^3\left(\dfrac{4}{5}\right)^3\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{128}{625}$,

$P(X=3)=C_5^4\left(\dfrac{4}{5}\right)^4\times\left(1-\dfrac{4}{5}\right)=\dfrac{256}{625}$,

$P(X=5)=C_5^5\left(\dfrac{4}{5}\right)^5=\dfrac{1\,024}{3\,125}$.

则该乡镇的总积分 X 的分布列为

X	-5	-3	-1	1	3	5
P	$\frac{1}{3\,125}$	$\frac{4}{625}$	$\frac{32}{625}$	$\frac{128}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{1\,024}{3\,125}$

$E(X)=(-5)\times\dfrac{1}{3\,125}+(-3)\times\dfrac{4}{625}+(-1)\times\dfrac{32}{625}+1\times\dfrac{128}{625}+3\times\dfrac{256}{625}+5\times\dfrac{1\,024}{3\,125}=3$.　　(8 分)

(3)

劳动力年龄层次	种植情况		合计
	种植三大谷物	种植棉、油、蔬菜等	
中老年劳动力	65	15	80
青壮年劳动力	5	15	20
合计	70	30	100

K^2 的观测值 $k=\dfrac{100\times(65\times15-15\times5)^2}{80\times20\times70\times30}\approx24.107$.

因为 $24.107>10.828$,

所以有 99.9% 的把握认为种植作物的种类与劳动力的年龄层次有关.　　(12 分)

21. 解:(1)设 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$.

以线段 F_1F_2 为直径的圆过点 P,所以 $PF_1\perp PF_2$.

所以 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=\left(-c+\dfrac{2\sqrt{6}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot\left(c+\dfrac{2\sqrt{6}}{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$,所以 $c=\sqrt{3}$,所以 $a^2-b^2=3$.　　(2 分)

将 $P\left(-\dfrac{2\sqrt{6}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 代入 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,

解得 $a^2=4$,$b^2=1$.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.　　(4 分)

(2)当直线 MN 的斜率不存在时,设直线 MN 的方程为 $x=m$.

设 $M\left(m,y_0\right)$,$N\left(m,-y_0\right)$,则 $\dfrac{m^2}{4}+y_0^2=1$ ①.

又 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}\times2|y_0||m|=1$,所以 $m^2y_0^2=1$ ②.

由①②得 $m^2=2$,$y_0^2=\dfrac{1}{2}$,所以 $k_1k_2=\dfrac{y_0}{m}\cdot\dfrac{-y_0}{m}=-\dfrac{y_0^2}{m^2}=-\dfrac{1}{4}$.　　(5 分)

当直线 MN 的斜率存在时,设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+y^2=1,\\ y=kx+m,\end{cases}$

得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$,

$\Delta=64k^2-16m^2+16>0$,

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-8km}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{4m^2-4}{1+4k^2}$,　　(7 分)

所以 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\dfrac{m^2-4k^2}{1+4k^2}$,

所以 $k_1k_2=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{m^2-4k^2}{4m^2-4}$ ③.　　(8 分)

又 $|MN|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{|x_1-x_2|^2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\dfrac{64k^2m^2-16(m^2-1)(1+4k^2)}{(1+4k^2)^2}}$

$=4\sqrt{1+k^2}\dfrac{\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2}$,

点 O 到直线 MN 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$,

所以 $S_{\triangle OMN}=\dfrac{1}{2}d\times|MN|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}\times4\sqrt{1+k^2}\cdot\dfrac{\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2}=\dfrac{2|m|\sqrt{4k^2-m^2+1}}{1+4k^2}=1$,

即 $4m^4-4(4k^2+1)m^2+(4k^2+1)^2=0$，

解得 $m^2=\frac{1+4k^2}{2}$， （10 分）

代入③式，得 $k_1k_2=\frac{y_1y_2}{x_1x_2}=\frac{m^2-4k^2}{4m^2-4}=\frac{\frac{1+4k^2}{2}-4k^2}{4\times\frac{1+4k^2}{2}-4}=-\frac{1}{4}$. （11 分）

综上可知，当 $\triangle OMN$ 的面积为定值 1 时，k_1k_2 是定值 $-\frac{1}{4}$. （12 分）

22. 解：(1)由题意得 $h(x)=m\left(\ln x+x+\frac{2}{x}\right)-\frac{e^x}{x}(x>0)$，

则 $h'(x)=m\left(\frac{1}{x}+1-\frac{2}{x^2}\right)-\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{m(x^2+x-2)-e^x(x-1)}{x^2}=\frac{[m(x+2)-e^x](x-1)}{x^2}$. （1 分）

①当 $m\leqslant 0$ 时，$m(x+2)-e^x<0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值，有唯一的极大值点 $x=1$. （2 分）

②当 $m>0$ 时，$h(x)$ 极值点的个数与关于 x 的方程 $m(x+2)-e^x=0$ 的正实数根有关，

即与函数 $y=m$ 与函数 $y=\frac{e^x}{x+2}(x\in(0,+\infty))$ 的图象的交点个数有关.

令 $q(x)=\frac{e^x}{x+2}$，则 $q'(x)=\frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2}>0$，

所以 $q(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$q(x)>q(0)=\frac{1}{2}$. （3 分）

结合图象知，(ⅰ)当 $0<m\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$m(x+2)-e^x<0$ 恒成立，

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减.

所以 $h(x)$ 在 $x=1$ 处取到极大值，有唯一的极大值点 $x=1$. （4 分）

(ⅱ)当 $m>\frac{1}{2}$ 时，存在唯一的 $x_0\in(0,+\infty)$，

使得 $m-\frac{e^x}{x+2}=0$.

若 $x_0=1$，则 $m=\frac{e}{3}$，方程 $(x+2)\left[m-\frac{e^x}{(x+2)}\right](x-1)=0$ 有两个相等的实数根 1.

当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减，

所以 $h(x)$ 没有极值.

若 $x_0\neq 1$，则 $m\neq\frac{e}{3}$，方程 $(x+2)\left[m-\frac{e^x}{(x+2)}\right](x-1)=0$ 有两个不相等的实数根 1 和 x_0，此时 $h(x)$ 有两个极值点. （6 分）

综上，当 $m\leqslant\frac{1}{2}$ 时，函数 $h(x)$ 有一个极值点，

当 $m>\frac{1}{2}$ 且 $m\neq\frac{e}{3}$ 时，函数 $h(x)$ 有两个极值点，

当 $m=\frac{e}{3}$ 时，函数 $h(x)$ 无极值点. （7 分）

(2)由题意知，$\varphi(x)\geqslant 1$ 恒成立即 $xe^x-\ln x+x-kx\geqslant 1$ 恒成立，等价于 $k\leqslant\left(\frac{xe^x-\ln x-1+x}{x}\right)_{\min}$.

令 $m(x)=\frac{xe^x-\ln x-1+x}{x}$，

则 $m'(x)=\frac{x^2e^x+\ln x}{x^2}$.

令 $\mu(x)=x^2e^x+\ln x$，

易知 $\mu(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

当 $x_1=\frac{1}{e}$ 时，$\mu\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e^2}e^{\frac{1}{e}}-1=\frac{1}{e^{2-\frac{1}{e}}}-1<0$，

当 $x_2=1$ 时，$\mu(1)=e>0$，

所以 $\mu(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上存在唯一的零点 x_0，

且 $\mu(x_0)=x_0^2e^{x_0}+\ln x_0=0$，

在区间 $(0,x_0)$ 上，$\mu(x)<0$，$m(x)$ 单调递减，在区间 $(x_0,+\infty)$ 上，$\mu(x)>0$，$m(x)$ 单调递增，

所以 $m(x)_{\min}=m(x_0)=\frac{x_0e^{x_0}-\ln x_0-1+x_0}{x_0}$. （9 分）

又因为 $\mu(x_0)=0$，所以 $x_0e^{x_0}=-\frac{1}{x_0}\ln x_0$，

即 $x_0e^{x_0}=\ln\frac{1}{x_0}\cdot e^{\ln\frac{1}{x_0}}$.

令 $p(x)=xe^x(x>0)$，$p'(x)=e^x+xe^x>0$，

所以 $p(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x_0=\ln\frac{1}{x_0}$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，

所以 $m(x_0)=\frac{1+x_0-1+x_0}{x_0}=2$， （11 分）

所以 $k\leqslant 2$，即 $k\in(-\infty,2]$. （12 分）

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索"K12 教育+互联网+大数据"的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供"衔接和桥梁纽带"作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网"年度口碑影响力在线教育品牌"。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。