广东实验中学　东北育才中学　石家庄二中　华中师大一附中
西南大学附中　南京师大附中　湖南师大附中　福州一中　　八校

2023届高三第一次学业质量评价(T8联考)
数学试题

命题学校:华中师范大学第一附属中学　　命题人:王文莹 徐光明　　审题人:张丹 胡文博

考试时间:2022年12月16日上午8:00—10:00　试卷满分150分　考试用时120分钟

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 复数z满足$1+zi+zi^2=|1-\sqrt{3}i|$,则$z=$

A. $1+i$　　B. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

C. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$　　D. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

2. 若集合$M=\{x|2^x>4\}$,$N=\{x|\log_3 x\leqslant 1\}$,则$M\cup N=$

A. $\{x|2<x\leqslant 3\}$　　B. $\{x|x>0\}$

C. $\{x|0<x<2$ 或 $x>2\}$　　D. $\mathbf{R}$

3. 已知S_n是数列$\{a_n\}$的前n项和,则"$a_n>0$"是"$\{S_n\}$是递增数列"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

4. 某同学掷骰子5次,分别记录每次骰子出现的点数,根据5次的统计结果,可以判断一定没有出现点数6的是

A. 中位数是3,众数是2　　B. 平均数是3,中位数是2

C. 方差是2.4,平均数是2　　D. 平均数是3,众数是2

5. 已知 $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha=\frac{1}{2}$，则 $\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=$

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{3}{4}$　　D. $\frac{3}{4}$

6. 已知圆台上底面半径为 1，下底面半径为 3，球与圆台的两个底面和侧面均相切，则该圆台的侧面积与球的表面积之比为

A. $\frac{13}{6}$　　B. $\frac{4}{3}\sqrt{3}$　　C. $\frac{13}{12}$　　D. $\frac{4}{3}$

7. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f(1+x)-x$，若 $f'(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则 $f'(2\ 023)=$

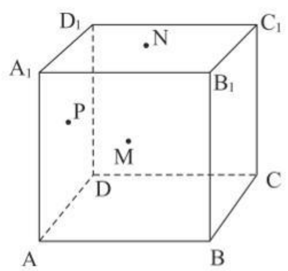
A. 2 021　　B. 2 022　　C. 2 023　　D. 2 024

8. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，直线 l 过坐标原点并交椭圆于 P,Q 两点（P 在第一象限），点 A 是 x 轴正半轴上一点，其横坐标是点 P 横坐标的 2 倍，直线 QA 交椭圆于点 B，若直线 BP 恰好是以 PQ 为直径的圆的切线，则椭圆的离心率为

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N,P 分别是面 AB_1，面 B_1D_1，面 DA_1 的中心，则下列结论正确的是



A. $NP\parallel DC_1$　　B. $MN\parallel$ 平面 ACP

C. $D_1C\perp$ 平面 MNP　　D. PM 与 BC_1 所成的角是 60°

10. 将函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)\left(|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到函数 $g(x)$ 的图像，若 $g(x)$ 的图像与 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称，则下列说法正确的有

A. $\varphi=\frac{\pi}{4}$

B. $\varphi=-\frac{\pi}{4}$

C. $g(x)$的对称轴过 $f(x)$的对称中心

D. $\forall m\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right]$, $\exists n\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right]$,使得 $f(m)=g(n)$

11. 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $nS_n=(n+1)S_{n-1}+(n-1)n(n+1)(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,若 $S_1=-50$,则下列结论正确的有

A. $a_5>0$

B. 当 $n=4$ 时,S_n 取得最小值

C. 当 $S_n>0$ 时,n 的最小值为 7

D. 当 $n=5$ 时,$\frac{S_n}{a_n}$取得最小值

12. 已知函数 $f(x)$及其导函数 $f'(x)$的定义域均为 $\mathbf{R}$,若 $f'(x)-f(x)=\frac{x-\sin x}{e^x}$,$f(0)=1$,则下列结论正确的是

A. $f(1)>e$

B. $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

C. 方程 $f'(x)=f(x)+\frac{1}{2e^2}$有两个解

D. $f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递增

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 二项式$\left(1-\frac{1}{x}\right)(1+x)^6$ 展开式中 x^3 的系数为__________.

14. 已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$,$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$,则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角大小是__________.

15. 若关于 x 的不等式$(\ln x)^2-ax\ln x>0$ 有且只有一个整数解,则实数 a 的取值范围为__________.

16. 已知双曲线 C:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1 和 F_2,O 为坐标原点,过 F_2 作渐近线 $y=\frac{b}{a}x$ 的垂线,垂足为 P,若$\angle F_1PO=\frac{\pi}{6}$,则双曲线的离心率为__________;又过点 P 作双曲线的切线交另一条渐近线于点 Q,且$\triangle OPQ$ 的面积 $S_{\triangle OPQ}=2\sqrt{3}$,则该双曲线的方程为__________.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.(本小题满分 10 分)

已知数列$\{\ln a_n\}$是等差数列,记 S_n 为$\{a_n\}$的前 n 项和,$\{S_n+a_1\}$是等比数列,$a_1=1$.

(1)求 a_n;

(2)记 $b_n=\log_2 a_{2n-1}+\log_2 a_{2n}$,求数列$\{(-1)^n\cdot b_n^{\ 2}\}$的前 10 项和.

18.(本小题满分 12 分)

在$\triangle ABC$中,角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c,已知 a、b、c 成等比数列,且 $\cos(A-C)+\cos B=\dfrac{3}{2}$.

(1)求角 A、B、C;

(2)若 $b=2$,延长 BC 至 D,使$\triangle ABD$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$,求 $\sin\angle CAD$.

19.(本小题满分 12 分)

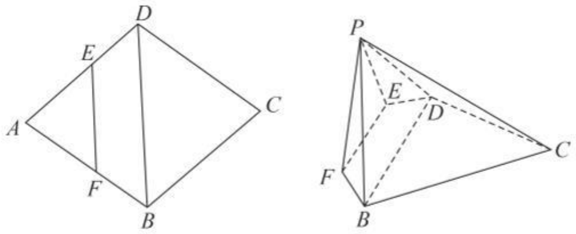
党的二十大的胜利召开为我们建设社会主义现代化国家指引了前进的方向.为讴歌中华民族实现伟大复兴的奋斗历程,增进高中学生对党的二十大的理解,某校组织开展党的二十大知识竞赛活动,以班级为单位参加比赛,最终甲、乙两班进行到了最后决赛,决赛采取五局三胜制,约定先胜三局者赢得比赛.已知每局比赛中必决出胜负,每一局若甲班先答题,则甲获胜的概率为$\dfrac{2}{3}$,若乙班先答题,则甲获胜的概率为$\dfrac{1}{2}$,每一局输的一方在接下来的一局中先答题,第一局由乙班先答题.

(1)求比赛一共进行了四局并且甲班最终赢得比赛的概率；

(2)若规定每一局比赛中胜者得 2 分，负者得 0 分，记 X 为比赛结束时甲班的总得分，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

20.(本小题满分 12 分)

如图(1)，菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120°$，动点 E,F 分别在边 AD,AB 上(不含端点)，且 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DB}(0<\lambda<1)$，沿 EF 将 $\triangle AEF$ 向上折起得到 $\triangle PEF$，使得平面 $PEF\perp$ 平面 $BCDEF$，如图(2)所示.



图(1)　　图(2)

(1)当 λ 为何值时，$BF\perp PD$；

(2)若直线 PC 与平面 $BCDEF$ 所成角的正切值为 $\frac{1}{3}$，求平面 PEF 和平面 PBD 夹角的大小.

21.(本小题满分12分)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的准线与 x 轴的交点为 H,直线过抛物线 C 的焦点 F 且与 C 交于 A,B 两点,$\triangle HAB$ 的面积的最小值为4.

(1)求抛物线 C 的方程;

(2)若过点 $Q\left(\frac{17}{4},1\right)$ 的动直线 l 交 C 于 M,N 两点,试问抛物线 C 上是否存在定点 E,使得对任意的直线 l,都有 $EM\perp EN$,若存在,求出点 E 的坐标;若不存在,则说明理由.

22.(本小题满分12分)

已知函数 $f(x)=e^x-x+e^3a$,其中 $-\frac{6}{5}\leqslant a<\frac{3}{e^3}-1$,函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点为 x_0,函数 $g(x)=\begin{cases}x+a-\dfrac{x-a}{e^x},0\leqslant x\leqslant x_0,\\(1-x)\ln x-a(x+1),x>x_0.\end{cases}$

(1)证明:

①$3<x_0<4$;

②函数 $g(x)$ 有两个零点;

(2)设 $g(x)$ 的两个零点为 x_1,$x_2(x_1<x_2)$,证明:$\frac{e^{x_2}-x_2}{e^{x_1}-x_1}>e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$.

(参考数据:$e\approx2.72$,$e^2\approx7.39$,$e^3\approx20.09$,$\ln 2\approx0.69$,$\ln 3\approx1.1$)

2023届高三第一次学业质量评价(T8联考)
数学试题参考答案及多维细目表

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	C	B	D	C	D	ABD	AC	ABD	ACD

1.【答案】C

【解析】由 $1+zi+zi^2=\left|1-\sqrt{3}i\right|$ 可得 $(i-1)z=1$，$\therefore z=\frac{1}{i-1}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$，故选 C.

2.【答案】B

【解析】$M=\{x|x>2\}$，$N=\{x|0<x\leqslant 3\}$，故 $M\cup N=\{x|x>0\}$，故选 B.

3.【答案】A

【解析】若 $a_n>0$，则 $S_n>S_{n-1}$，$\therefore\{S_n\}$ 是递增数列，$\therefore$"$a_n>0$"是"$\{S_n\}$是递增数列"的充分条件；若 $\{S_n\}$ 是递增数列，则 $S_n>S_{n-1}$，$\therefore a_n>0(n\geqslant 2)$，但是 a_1 的符号不确定，$\therefore$"$a_n>0$"不是"$\{S_n\}$是递增数列"的必要条件，故选 A.

4.【答案】C

【解析】选项 A：有可能出现点数 6，例如 2,2,3,4,6；

选项 B：有可能出现点数 6，例如 2,2,2,3,6；

选项 C：不可能出现点数 6，$\because \frac{1}{5}\times(6-2)^2=3.2$，如果出现点数 6，则方差大于或等于 3.2，不可能是 2.4；

选项 D：有可能出现点数 6，例如 2,2,2,3,6，故选 C.

5.【答案】B

【解析】$\because \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha=\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，

$\therefore \sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left[2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{2}\right]=\cos 2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=1-2\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，故选 B.

6.【答案】D

【解析】设圆台的上底面半径为 r，下底面半径 R，母线长为 l，球的半径为 R_0，

$\because$ 球与圆台的两个底面和侧面均相切，

$\therefore l=r+R=1+3=4$，$R_0{}^2=1\times 3=3$，

$\therefore$ 圆台的侧面积与球的表面积之比为 $\frac{S_{侧}}{S_{表}}=\frac{\pi(r+R)\cdot l}{4\pi R_0{}^2}=\frac{\pi(1+3)\times 4}{4\pi\times 3}=\frac{4}{3}$，故选 D.

7.【答案】C

【解析】$\because g(x)$ 为偶函数，$\therefore g(x)=g(-x)$，即 $f(1+x)-x=f(1-x)+x$，两边同时对 x 求导得 $f'(1+x)-1=-f'(1-x)+1$，

即 $f'(1+x)+f'(1-x)=2$，

令 $x=0$，则 $f'(1)=1$，

$\because f'(x)$ 为奇函数，$\therefore f'(-x)=-f'(x)$，又 $f'(1+x)+f'(1-x)=2$，即 $f'(x)=2-f'(2-x)$，

联立 $f'(-x)=-f'(x)$ 得 $-f'(-x)=2-f'(2-x)$，即 $f'(x+2)=f'(x)+2$，

$\therefore f'(2\,023)=f'(2\times 1\,011+1)=f'(1)+2\times 1\,011=2\,023$，故选 C.

8.【答案】D

【解析】依题意，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(-x_1,-y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$A(2x_1,0)$，直线 PQ、$QB(QA)$、BP 的斜率分别为 k_1,k_2,k_3，则 $k_2=\frac{0-(-y_1)}{2x_1-(-x_1)}=\frac{y_1}{3x_1}=\frac{1}{3}k_1$，$k_1k_3=-1$，$\therefore k_2k_3=-\frac{1}{3}$，

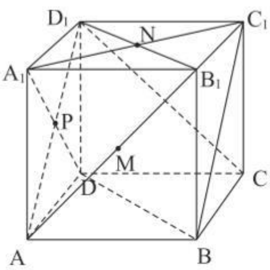
$\because \frac{x_1{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2{}^2}{a^2}+\frac{y_2{}^2}{b^2}=1$，两式相减得 $\frac{x_1{}^2-x_2{}^2}{a^2}+\frac{y_1{}^2-y_2{}^2}{b^2}=0$，

$\therefore \frac{(y_1+y_2)}{(x_1+x_2)}\cdot\frac{(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)}=-\frac{b^2}{a^2}$，即 $k_2k_3=-\frac{b^2}{a^2}$，

$\therefore -\frac{b^2}{a^2}=-\frac{1}{3}$，$\therefore \frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{3}$，$\therefore e^2=\frac{c^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$ 椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{6}}{3}$，故选 D.

9.【答案】ABD



【解析】连接 A_1C_1，A_1D，则 NP 是 $\triangle A_1C_1D$ 的中位线，$\therefore NP\mathbin{/\mkern-6mu/}DC_1$，故选项 A 正确；

连接 B_1D_1，B_1A，则 $MN\mathbin{/\mkern-6mu/}AD_1$，$\therefore MN\mathbin{/\mkern-6mu/}$ 平面 ACD_1，即 $MN\mathbin{/\mkern-6mu/}$ 平面 ACP，故选项 B 正确；

连接 B_1D_1，B_1A，AD_1，则平面 MNP 即为平面 B_1AD_1，显然 D_1C 不垂直平面 B_1AD_1，故选项 C 错误；

$\because PM\mathbin{/\mkern-6mu/}BD$，$\therefore \angle DBC_1$ 即为 PM 与 BC_1 所成的角，$\angle DBC_1=60°$，故选项 D 正确. 故选 ABD.

10.【答案】AC

【解析】方法一：将 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$ 的图像向

左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ 的图像，

$\because g(x)$的图像与 $f(x)$的图像关于 y 轴对称，

$\therefore g(0)=f(0)$，即 $\cos\varphi=\sin\varphi$，

$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$，经检验，满足题意，故选项 A 正确，选项 B 不正确；

设 $f(x)$的周期为 T，$\because g(x)$的图像是 $f(x)$的图像向左平移 $\frac{T}{4}$ 个得到，$\therefore g(x)$的对称轴过 $f(x)$的对称中心，故选项 C 正确；

当 $m\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right]$ 时，$f(m)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，当 $n\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{8}\right]$时，$g(n)$的值域为 $[0,1]$，$\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]\not\subset[0,1]$，故选项 D 不正确. 故选 AC .

方法二：由题意可得 $g(x)=\sin\left[2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\varphi\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$，

$\because g(x)$的图像与 $f(x)$的图像关于 y 轴对称，$\therefore g(x)=f(-x)$，

即 $\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=\sin(-2x+\varphi)$，

$\therefore 2x+\frac{\pi}{2}+\varphi=\pi+2x-\varphi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\because |\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$，故选项 A 正确，选项 B 不正确；

$f(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$，令 $2x+\frac{\pi}{4}=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $f(x)$的对称中心为$\left(\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8},0\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，$g(x)=\sin\left(2x+\frac{3}{4}\pi\right)$，令 $2x+\frac{3}{4}\pi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $g(x)$的对称轴为 $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\therefore g(x)$的对称轴过 $f(x)$的对称中心，故选项 C 正确；选项 D 的判断同上.

11.【答案】ABD

【解析】由 $nS_n=(n+1)S_{n-1}+(n-1)n\cdot(n+1)\ (n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$得 $\frac{S_n}{n+1}-\frac{S_{n-1}}{n}=n-1\ (n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，$\therefore \frac{S_2}{3}-\frac{S_1}{2}=1$，$\frac{S_3}{4}-\frac{S_2}{3}=2$，…，$\frac{S_n}{n+1}-\frac{S_{n-1}}{n}=n-1$，

累加得 $\frac{S_n}{n+1}-\frac{S_1}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$，解得 $2S_n=n^3-51n-50\ (n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$，当 $n=1$ 时，$S_1=-50$ 满足上式，$\therefore S_n=\frac{n^3-51n-50}{2}$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{3n^2-3n-50}{2}$，

$\therefore a_5=5>0$，故选项 A 正确；

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=\frac{3n^2-3n-50}{2}$单调递增，又 $a_1=S_1=-50$，$a_2=S_2-S_1=-22$，

$\therefore \{a_n\}$单调递增，且 $a_1<a_2<a_3<a_4<0<a_5<a_6<\cdots\cdots$，$\therefore$当 $n\leqslant 4$ 时，$\{S_n\}$单调递减，当 $n\geqslant 5$ 时，$\{S_n\}$单调递增，且 $S_4<S_5$，$\therefore$当 $n=4$ 时，S_n 取得最小值，故选项 B 正确；

又 $S_7=\frac{7^3-51\times 7-50}{2}=-32<0$，$S_8=\frac{8^3-51\times 8-50}{2}=27>0$，$\therefore$当 $S_n>0$ 时，n 的最小值为 8，故选项 C 错误；

当 $n=1,2,3,4$ 时，$\frac{S_n}{a_n}>0$；当 $n=5,6,7$ 时，$\frac{S_n}{a_n}<0$；当 $n\geqslant 8$ 时，$\frac{S_n}{a_n}>0$，

$\therefore$当 $n=5,6,7$ 时，考虑$\frac{S_n}{a_n}$的最小值，

又当 $n=5,6,7$ 时，$\frac{1}{a_n}$恒为正且单调递减，S_n 恒为负且单调递增，

$\therefore \frac{S_n}{a_n}$单调递增，$\therefore$当 $n=5$ 时，$\frac{S_n}{a_n}$取得最小值，故选项 D 正确，故选 ABD.

12.【答案】ACD

【解析】由题意得$\left[\frac{f(x)}{e^x}\right]'=\frac{x-\sin x}{e^{2x}}$，

设 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$，则 $F'(x)=\frac{x-\sin x}{e^{2x}}$，

易得当 $x<0$ 时，$F'(x)<0$，当 $x>0$ 时，$F'(x)>0$，

$\therefore$函数 $F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增，

$\therefore F(0)<F(1)$，即$\frac{f(0)}{e^0}<\frac{f(1)}{e}$，$\therefore f(1)>e$，选项 A 正确；

$\because f'\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}}{e^{\frac{\pi}{2}}}>0$，

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)>f\left(\frac{\pi}{2}\right)$，选项 B 错误；

设 $h(x)=f'(x)-f(x)=\frac{x-\sin x}{e^x}$，

则 $h'(x)=\left(\frac{x-\sin x}{e^x}\right)'=\frac{1-\cos x-x+\sin x}{e^x}$，

设 $r(x)=1-\cos x-x+\sin x$，

则当 $x\geqslant\pi$ 时，$r(x)=(1-x)+(\sin x-\cos x)<(1-\pi)+2<0$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$\sin x\geqslant x$，且 $1-\cos x\geqslant 0$，$\therefore r(x)\geqslant 0$；

当 $0<x<\pi$ 时，$r'(x)=\sin x-1+\cos x$

$=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-1$，

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$r'(x)>0$，$\therefore r(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$r'(x)<0$，$\therefore r(x)$ 单调递减，

又 $\because r(0)=0$，$r(\pi)=2-\pi<0$，

$\therefore\exists x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，使得 $r(x_0)=0$，

即当 $x\in(0,x_0)$ 时，$r(x)>0$，当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$r(x)<0$；

综上：当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$r(x)\geqslant 0$，即 $h'(x)\geqslant 0$，$\therefore h(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$r(x)<0$，即 $h'(x)<0$，

$\therefore h(x)$ 单调递减，

$\because h(0)=0$，$\therefore$ 当 $x<0$ 时，$h(x)<h(0)=0$，

当 $x>0$ 时，易证 $x>\sin x$，$\therefore h(x)>0$，

且当 $x\to+\infty$ 时，$h(x)\to 0$，

又 $\because x_0\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，$h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\frac{\pi}{2}-1}{e^{\frac{\pi}{2}}}>\dfrac{\frac{3}{2}-1}{e^2}=\frac{1}{2e^2}$，$\therefore$ 方程 $h(x)=\frac{1}{2e^2}$ 有两个解，即方程 $f'(x)=f(x)+\frac{1}{2e^2}$ 有两个解，选项 C 正确；

由 $F(x)=\frac{f(x)}{e^x}$ 可得 $f(x)=e^x\cdot F(x)$，$\therefore f'(x)=e^x[F(x)+F'(x)]$，

令 $u(x)=F(x)+F'(x)$，则 $u'(x)=F'(x)+[F'(x)]'=\frac{x-\sin x}{e^{2x}}+\left[\frac{x-\sin x}{e^{2x}}\right]'=\frac{x-\sin x}{e^{2x}}+\frac{1-\cos x-2\left(x-\sin x\right)}{e^{2x}}=\frac{r(x)}{e^{2x}}$，

由以上分析可知，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$r(x)>0$，即 $u'(x)>0$，

$\therefore u(x)$ 单调递增，$\therefore u(x)>u(0)=F(0)+F'(0)=1$，$\therefore f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，选项 D 正确. 故选 ACD.

13.【答案】5

【解析】$\left(1-\frac{1}{x}\right)(1+x)^6=(1+x)^6-\frac{1}{x}(1+x)^6$，

展开式中 x^3 的系数为 $C_6^3-C_6^4=5$.

14.【答案】$\frac{5}{6}\pi$

【解析】方法一：作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，由题意 $OA\perp OB$，且 $|AB|=2|OB|$，

$\therefore\angle OAB=\frac{\pi}{6}$，$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{5}{6}\pi$.

方法二：由 $|\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 平方得 $|\boldsymbol{b}|^2=4(|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2)$，$\because(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，$\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|^2$，代入 $|\boldsymbol{b}|^2=4(|\boldsymbol{a}|^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2)$ 得 $|\boldsymbol{b}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}|\boldsymbol{a}|$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\therefore\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\frac{5}{6}\pi$.

15.【答案】$\left[\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3}\right)$

【解析】令 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $x\in(0,e)$ 时，$f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(e,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$\therefore f(x)$ 单调递减，

且当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，

方法一：原不等式等价于 $\begin{cases}x>1,\\ \frac{\ln x}{x}>a,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<1,\\ \frac{\ln x}{x}<a,\end{cases}$

$\because$ 有且只有一个整数解，$\therefore f(2)\leqslant a<f(3)$，

即实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3}\right)$.

方法二：原不等式等价于 $\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2-a\cdot\frac{\ln x}{x}>0$，

若 $a>0$，则 $\frac{\ln x}{x}>a$ 或 $\frac{\ln x}{x}<0$，$\frac{\ln x}{x}<0$ 显然没有整数解，

要满足 $\frac{\ln x}{x}>a$ 有且只有一个整数解，又 $f(4)=\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 2}{2}=f(2)<f(3)$，则 $f(2)\leqslant a<f(3)$，可得 $\frac{\ln 2}{2}\leqslant a<\frac{\ln 3}{3}$；

若 $a<0$，则 $\frac{\ln x}{x}>0$ 或 $\frac{\ln x}{x}<a$，$\frac{\ln x}{x}>0$ 有无数多个整数解，$\frac{\ln x}{x}<a$ 没有整数解；

若 $a=0$，不等式显然有无穷多个整数解，

综上，实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 3}{3}\right)$.

16.【答案】$\frac{\sqrt{21}}{3}$；$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$

【解析】方法一：设 $\angle POF_2=\alpha$，则有 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，又

F_2P 垂直于渐近线 $y=\frac{b}{a}x$，$\therefore |OP|=a, |PF_2|=b$，

$\therefore \sin\alpha=\frac{b}{c}, \cos\alpha=\frac{a}{c}$，

在 $\triangle OF_1P$ 中，由正弦定理：$\frac{a}{\sin(\alpha-30^\circ)}=\frac{c}{\sin 30^\circ}$，

$\therefore \frac{a}{\frac{b}{c}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{a}{c}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2c}{1}$，$\therefore a=\sqrt{3}b-a$，$\therefore 2a=\sqrt{3}b$，$\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$，$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$，

方法二：依题意可得 $P\left(\frac{a^2}{c},\frac{ab}{c}\right)$，$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，

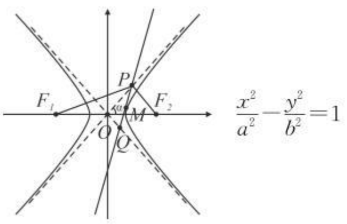
$\therefore |PF_1|=\sqrt{\left(\frac{a^2+c^2}{c}\right)^2+\left(\frac{ab}{c}\right)^2}=\sqrt{3a^2+c^2}$，

又 $|PO|=a, |OF_1|=c$，

在 $\triangle OPF_1$ 中，$|OF_1|^2=|PF_1|^2+|PO|^2-2\cdot|PO|\cdot|PF_1|\cdot\cos\angle F_1PO=3a^2+c^2$，

即 $c^2=3a^2+c^2+a^2-2\cdot a\cdot\sqrt{3a^2+c^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$，化简得 $3c^2=7a^2$，

$\therefore e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{7}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}$，



如图，过 P 点的切线 PQ 与双曲线切于点 $M(x_0,y_0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

又 P,Q 均在双曲线的渐近线上，故设 $P\left(x_1,\frac{b}{a}x_1\right)$，$Q\left(x_2,-\frac{b}{a}x_2\right)$，

又 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$，$\therefore \sin 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{b}{a}}{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，

$\therefore S_{\triangle POQ}=\frac{1}{2}|OP||OQ|\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{x_1^2+\left(\frac{b}{a}x_1\right)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+\left(-\frac{b}{a}x_2\right)^2}\cdot\frac{2ab}{a^2+b^2}=\frac{b}{a}|x_1x_2|$，

过 M 点的切线 PQ：$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1$，

即 $y=\frac{b^2x_0x}{y_0a^2}-\frac{b^2}{y_0}$，

代入 $b^2x^2-a^2y^2=0$，化简得 $(a^2y_0^2-b^2x_0^2)x^2+2a^2b^2x_0x-a^4b^2=0$，

又 $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$，

$\therefore -a^2b^2x^2+2a^2b^2x_0x-a^4b^2=0$，

即 $x^2-2x_0x+a^2=0$，$\therefore x_1x_2=a^2$，

$\therefore S_{\triangle POQ}=\frac{b}{a}|x_1x_2|=ab=\frac{\sqrt{3}}{2}b\cdot b=2\sqrt{3}$，

$\therefore b^2=4$，

$\therefore b=2, a=\sqrt{3}$，故双曲线的方程为 $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$.

17.【解析】(1) 由题意得 $2\ln a_2=\ln a_1+\ln a_3$，

$\therefore a_2^2=a_1\cdot a_3$，

又 $\{S_n+a_1\}$ 是等比数列，

$\therefore (S_2+a_1)^2=(S_1+a_1)\cdot(S_3+a_1)$，

$\because a_1=1$，$\therefore \begin{cases} a_2^2=a_3, \\ (a_2+2)^2=2(2+a_2+a_3), \end{cases}$

$\therefore a_2^2-2a_2=0$，又 $a_n>0$，故 $a_2=2$，

又 $\{\ln a_n\}$ 是等差数列，故 $\{a_n\}$ 为等比数列，首项 $a_1=1$，公比 $q=\frac{a_2}{a_1}=2$，

$\therefore \{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$. …………… 5分

(2) $\because a_n=2^{n-1}$，

$\therefore b_n=\log_2 a_{2n-1}+\log_2 a_{2n}=\log_2 2^{2n-1-1}+\log_2 2^{2n-1}=2n-2+2n-1=4n-3$，

令 $C_n=(-1)^n\cdot b_n^2$，则 $C_{2n-1}+C_{2n}=-b_{2n-1}^2+b_{2n}^2=(b_{2n}+b_{2n-1})(b_{2n}-b_{2n-1})=4(b_{2n}+b_{2n-1})(n\in\mathbf{N}^*)$，记 $\{C_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，

$\therefore T_{10}=(C_1+C_2)+\cdots+(C_9+C_{10})=4(b_1+b_2+\cdots+b_{10})=4\times\frac{(1+37)\times 10}{2}=760$，

$\therefore$ 数列 $\{(-1)^n\cdot b_n^2\}$ 的前 10 项和为 760. ………………………………………… 10分

18.【解析】(1) 由 $A+B+C=\pi$，$\therefore A+C=\pi-B$，$\cos B=-\cos(A+C)$，

$\therefore \cos(A-C)-\cos(A+C)=\frac{3}{2}$，

$\therefore \sin A\cdot\sin C=\frac{3}{4}$，

又 a,b,c 成等比数列，故 $b^2=ac$，

$\therefore \sin^2 B=\sin A\cdot\sin C=\frac{3}{4}$，

$\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

方法一：$\therefore |\cos B|=\frac{1}{2}$，又 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=$

$\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，

∴$\cos B=\frac{1}{2}$，$a=c$，又 $0<B<\pi$，

∴$A=B=C=\frac{\pi}{3}$. ………………………… 6 分

方法二：若 $B=\frac{\pi}{3}$，则 $\cos B=\frac{1}{2}$，代入 $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$，则 $\cos(A-C)=1$，

∵$0<A<\pi,0<C<\pi$，∴$A=C=\frac{\pi}{3}$

若 $B=\frac{2\pi}{3}$，则 $\cos B=-\frac{1}{2}$，代入 $\cos(A-C)+\cos B=\frac{3}{2}$，则 $\cos(A-C)=2$(舍)，

综上 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$. ……………………… 6 分

(2)∵$b=2$，∴$|AB|=2$，

∴$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|BD|\cdot\sin 60°$，

即 $\frac{1}{2}\times2\cdot|BD|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，∴$|BD|=3$，∴$|CD|=1$，由余弦定理：在 $\triangle ACD$ 中，$|AD|^2=|AC|^2+|CD|^2-2|AC|\cdot|CD|\cos\angle DCA=2^2+1^2-2\times2\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=7$，

又由正弦定理：$\frac{|AD|}{\sin 120°}=\frac{|CD|}{\sin\angle CAD}$，

∴$\frac{\sqrt{7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sin\angle CAD}$，

∴$\sin\angle CAD=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{21}}{14}$. ……… 12 分

19.【解析】记 $A_i(i=1,2,3,4,5)$ 表示“第 i 局甲获胜”，

(1)设 A 表示“比赛一共进行了四局并且甲班最终获胜”，则事件 A 包括三种情况：$\overline{A_1}A_2A_3A_4$，$A_1\overline{A_2}A_3A_4$，$A_1A_2\overline{A_3}A_4$，这三种情况互斥，且 A_1,A_2,A_3,A_4 相互独立，

∴$P(A)=P(\overline{A_1}A_2A_3A_4+A_1\overline{A_2}A_3A_4+A_1A_2\cdot\overline{A_3}A_4)=P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$. …………… 4 分

(2)由题意，X 的所有可能取值有 0,2,4,6，

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$，

$P(X=2)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}+\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}A_3\overline{A_4})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{36}$，

$P(X=4)=P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4}\,\overline{A_5}+A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5}+A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}A_4\overline{A_5}+\overline{A_1}A_2A_3\overline{A_4}\,\overline{A_5}+\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cdot A_4\overline{A_5}+\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3A_4\overline{A_5})=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{13}{72}$；

$P(X=6)=1-P(X=0)-P(X=2)-P(X=4)=1-\frac{1}{18}-\frac{5}{36}-\frac{13}{72}=\frac{5}{8}$；……………… 10 分

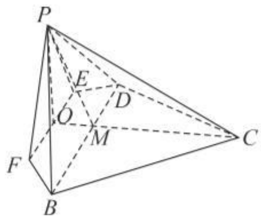
∴X 的分布列为：

X	0	2	4	6
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{13}{72}$	$\frac{5}{8}$

∴$E(X)=0\times\frac{1}{18}+2\times\frac{5}{36}+4\times\frac{13}{72}+6\times\frac{5}{8}=\frac{19}{4}$.

……………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)∵菱形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=120°$，故 $\angle A=60°$，$AB=AD$，



∴$\triangle ABD$ 是等边三角形，又 $\overrightarrow{EF}=\lambda\overrightarrow{DB}$，

∴ $EF\parallel BD$，∴ $\triangle PEF$ 也是等边三角形，

∵平面 $PEF\perp$ 平面 $BCDEF$，取 EF 的中点 O，则 $PO\perp EF$，且 $PO\perp$ 平面 $BCDEF$，连接 DO，

由 $BF\perp PD$，而 $PO\perp BF$，$DO\cap PO$，

∴$BF\perp$ 平面 POD，∴$BF\perp OD$，

延长 DO 交 AB 于点 N，则 $DN\perp AB$，

又∵$AO\perp BD$，∴O 为 $\triangle ABD$ 的重心，

又 O 点在 EF 上，$EF\parallel BD$，∴$\overrightarrow{EF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$，即 $\lambda=\frac{2}{3}$. ……………………………………… 6 分

(2)方法一：由(1)连接 CO，设 $\triangle ABD$ 边长为 a，则 $|PO|=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda a$，$|CO|=\frac{\sqrt{3}}{2}(2-\lambda)a$，

∵$PO\perp$ 平面 $BCDEF$，

∴直线 PC 与平面 $BCDEF$ 所成角为 $\angle PCO$，

∴$\tan\angle PCO=\frac{|PO|}{|CO|}=\frac{\lambda}{2-\lambda}=\frac{1}{3}$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，

∴EF 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

在棱锥 $P\text{-}BCDEF$ 中，设 OC 与 BD 相交于 M 点，连接 PM，又设平面 $PEF\cap$ 平面 PBD 于直线 l，则 l 过点 P，

$\because EF/\!/BD$，$EF\not\subset$ 平面 PBD，

$\therefore EF/\!/$ 平面 PBD，

又平面 $PEF\cap$ 平面 PBD 于直线 l，

$\therefore EF/\!/l$，同理 $l/\!/BD$，

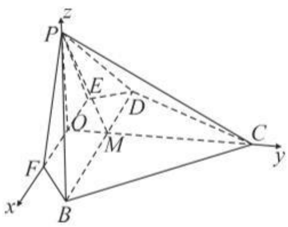
由上可知 $PO\perp EF$，$CO\perp EF$，

$\therefore EF\perp$ 平面 POM，$\therefore l\perp$ 平面 POM，

$\therefore \angle OPM$ 就是平面 PEF 和平面 PBD 所成二面角的平面角，

又 $PO=OM$，且 $PO\perp OM$，$\therefore \angle OPM=45°$，即平面 PEF 与平面 PBD 的夹角为 $45°$. ……………………………………………………… 12 分

方法二：以 O 为坐标原点，以 OF，OC，OP 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系（如图所示），设菱形 $ABCD$ 边长为 2，



则 $P(0,0,\sqrt{3}\lambda)$，$E(-\lambda,0,0)$，$F(\lambda,0,0)$，$B(1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0)$，$D(-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0)$，$C(0,2\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda,0)$，$\because PO\perp$ 平面 $BDEF$，$\therefore \angle PCO$ 即为 PC 与平面 $BCDEF$ 所成的角，

$\therefore \tan\angle PCO=\dfrac{|PO|}{|OC|}=\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{2\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda}=\dfrac{1}{3}$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\therefore OC\perp$ 平面 PEF，

$\therefore \overrightarrow{OC}=\left(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0\right)$ 即为平面 PEC 的法向量.

设平面 PBD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y-\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$

取 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$，则 $\cos\langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{OC}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{OC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore \langle\overrightarrow{OC},\boldsymbol{n}\rangle=45°$，

$\therefore$ 平面 PEF 与平面 PBD 的夹角为 $45°$. ………………………………………………………… 12 分

21.【解析】(1) 由题意，AB 斜率不为零，设 AB：$x=\lambda y+\dfrac{p}{2}$ 代入 $y^2=2px(p>0)$，$\therefore y^2-2p\lambda y-p^2=0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=2p\lambda$，$y_1y_2=-p^2$，

$\therefore S_{\triangle HAB}=\dfrac{1}{2}\cdot p|y_1-y_2|$

$=\dfrac{1}{2}\cdot p\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\dfrac{1}{2}p\cdot\sqrt{4p^2\lambda^2+4p^2}=p^2\sqrt{\lambda^2+1}$，

$\therefore$ 当 $\lambda=0$ 时，$S_{\triangle HAB}$ 取最小值 p^2，$\therefore p^2=4$，$\therefore p=2$，抛物线 C 的方程为：$y^2=4x$. ……… 5 分

(2) 假设存在 $E(x_0,y_0)$，设 $M(x_3,y_3)$，$N(x_4,y_4)$，由题意，MN 斜率不为零，

设 MN 的方程为 $x=t(y-1)+\dfrac{17}{4}$ 代入 $y^2=4x$，

可得 $y^2-4ty+4t-17=0$，$\therefore \begin{cases}y_3+y_4=4t,\\ y_3\cdot y_4=4t-17,\end{cases}$

$\therefore \dfrac{y_0-y_3}{x_0-x_3}\cdot\dfrac{y_0-y_4}{x_0-x_4}=-1$，

$\therefore \dfrac{4}{(y_0+y_3)}\cdot\dfrac{4}{(y_0+y_4)}=-1$，

$\therefore y_0^2+(y_3+y_4)y_0+y_3y_4+16=0$，

$\therefore y_0^2+4ty_0+4t-1=0$，

即 $4t(y_0+1)+y_0^2-1=0$，$\therefore \begin{cases}y_0+1=0,\\ y_0^2-1=0,\end{cases}$

解得 $y_0=-1$，故存在定点 $E\left(\dfrac{1}{4},-1\right)$ 满足题意. ……………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) ① $\because f'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$e^x>1$，

$\therefore f'(x)>0$，$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

$\because -\dfrac{6}{5}\leqslant a<\dfrac{3}{e^3}-1$，$\therefore f(3)=e^3-3+ae^3<e^3-3+e^3\left(\dfrac{3}{e^3}-1\right)=0$，$f(4)=e^4-4+ae^3\geqslant e^4-4-\dfrac{6}{5}e^3\approx 7.39^2-4-\dfrac{6}{5}\times 20.09>0$，

$\therefore f(x)$ 存在唯一的零点 x_0，且 $3<x_0<4$. …………………………………………………………… 3 分

② 当 $0\leqslant x\leqslant x_0$ 时，$g(x)=x+a-\dfrac{x-a}{e^x}$，

$g'(x)=1-\dfrac{1-x+a}{e^x}=\dfrac{e^x-1+x-a}{e^x}$，$\because x>0$，$a<0$，$\therefore e^x-1>0$，$x-a>0$，$\therefore g'(x)>0$，

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 单调递增，$\because 3<x_0<4$，

$\therefore g(x_0)>g(3)=3+a-\dfrac{3-a}{e^3}\geqslant 3-\dfrac{6}{5}-\dfrac{3+\frac{6}{5}}{e^3}=\dfrac{9e^3-21}{5e^3}\approx\dfrac{9\times 20.09-21}{5\times 20.09}>0$，

又 $\because g(1)=1+a-\dfrac{1-a}{e}=1-\dfrac{1}{e}+a\left(1+\dfrac{1}{e}\right)<1-\dfrac{1}{e}+\left(\dfrac{3}{e^3}-1\right)\left(1+\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{3+3e-2e^3}{e^4}\approx\dfrac{3+3\times 2.72-2\times 20.09}{e^4}<0$，

$\therefore g(x)$ 在 $[1,x_0]$ 有唯一的零点，(注：取 $g(0)<$

0 也可以)；

当 $x>x_0$ 时，$g'(x)=-\ln x+\frac{1}{x}-1-a<-\ln x_0+\frac{1}{x_0}-1-a<-\ln 3+\frac{1}{3}-1+\frac{6}{5}=\frac{8}{15}-\ln 3\approx\frac{8}{15}-1.1<0$，

∴$g(x)$在$(x_0,+\infty)$单调递减，

∴$g(4)=-3\ln 4-5a>-3\ln 4-5\left(\frac{3}{e^3}-1\right)=5-3\ln 4-\frac{15}{e^3}\approx 0.11>0$，

$g(e^2)=2(1-e^2)-a(e^2+1)\leqslant 2(1-e^2)+\frac{6}{5}(e^2+1)=\frac{16-4e^2}{5}\approx\frac{16-4\times 7.39}{5}<0$，

∴$g(x)$在$(x_0,+\infty)$有唯一的零点，

综上，函数 $g(x)$ 有两个零点. …………… 6 分

(2)由(1)可知 $g(x_1)=g(x_2)=0$，其中 $1<x_1<x_0<x_2$，由 $g(x_1)=0$ 得 $x_1+a-\frac{x_1-a}{e^{x_1}}=0$，即 $x_1-a(e^{x_1}+1)-x_1e^{x_1}=0$，由 $g(x_2)=0$ 得 $\ln x_2-a(x_2+1)-x_2\ln x_2=0$，

设 $h(x)=\ln x-a(x+1)-x\ln x$，则 $h(x_2)=h(e^{x_1})=0$，

∵$1<x_1<x_0<x_2$，∴$e^{x_1}>e$，$x_2>x_0>e$，

而 $x>e$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-a-\ln x-1<\frac{1}{e}-a-2\leqslant\frac{1}{e}+\frac{6}{5}-2=\frac{1}{e}-\frac{4}{5}<0$，

∴$h(x)$在$(e,+\infty)$单调递减，∴$x_2=e^{x_1}$，

要证 $\frac{e^{x_2}-x_2}{e^{x_1}-x_1}>e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即证 $\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}>e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，即证 $\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}>x_2-x_1$，即证 $e^{\frac{x_2-x_1}{2}}-e^{\frac{x_1-x_2}{2}}>x_2-x_1$，设 $\frac{x_2-x_1}{2}=t$，则即证 $e^t-e^{-t}>2t$，

设 $h(t)=e^t-e^{-t}-2t$，$t>0$，则 $h'(t)=e^t+e^{-t}-2>2-2=0$，

∴当 $t>0$ 时，$h(t)$单调递增，

∴$h(t)>h(0)=0$，即证. ………………… 12 分

关于我们