县（市、区）______ 班级______ 姓名______ 考生号______ 考场号______ 座位号______
装 订 线

绝密★启用前

“天一大联考·皖豫名校联盟”

2022—2023 学年(上)高二年级阶段性测试(二)

数 学

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上，并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑. 如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号. 回答非选择题时，将答案写在答题卡上. 写在本试卷上无效.
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $l:x-y-2=0$ 与两坐标轴围成的三角形的面积是

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

2. 已知在空间四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$，则 $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=$

A. $2\overrightarrow{AG}$　　B. $2\overrightarrow{GC}$　　C. $2\overrightarrow{BC}$　　D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

3. 已知圆 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ 关于直线 $ax+by+1=0$ 对称，且点 $(1,1)$ 在该直线上，则实数 $a=$

A. 3　　B. 2　　C. -2　　D. -3

4. 已知点 $A(-1,2)$，$B(5,8)$，若过点 $C(1,0)$ 的直线与线段 AB 相交，则该直线的斜率的取值范围是

A. $[-1,2]$　　B. $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$

C. $(-\infty,-2]\cup[1,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

5. 若圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 与圆 $x^2+y^2-4mx+4m^2-4=0$ 有且仅有一条公切线，则实数 $m=$

A. -1　　B. 1　　C. ±1　　D. 0

6. 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\frac{1}{2}AB=AD=AA_1=1$，则直线 BC 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

7. 某公司要建一个以甲、乙、丙三地为顶点的大型三角形养鱼场，若甲、乙两地之间的距离为 12 km，且甲、丙两地的距离是乙、丙两地距离的 $\sqrt{2}$ 倍，则这个三角形养鱼场的面积最大是

A. 72 km^2　　B. $72\sqrt{2}$ km^2　　C. 78 km^2　　D. $78\sqrt{2}$ km^2

8. 已知抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上，点 P 的横坐标为 -1，点 Q 的纵坐标为 0，若 $\triangle MFQ\cong\triangle MPF$，则 $|MF|=$

A. 4　　B. 3　　C. $2\sqrt{2}$　　D. 2

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知空间中三点 $A(-1,2,1)$，$B(1,3,1)$，$C(-2,4,2)$，则

A. 向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 互相垂直

B. 与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相反的单位向量的坐标是 $\left(\frac{3\sqrt{11}}{11},-\frac{\sqrt{11}}{11},-\frac{\sqrt{11}}{11}\right)$

C. $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 夹角的余弦值是 $\frac{\sqrt{66}}{11}$

D. $\overrightarrow{BC}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 上的投影向量的模为 $\sqrt{6}$

10. 已知曲线 $C:\frac{x^2}{6-k}-\frac{y^2}{k-3}=1(k\in\mathbf{R})$，则

A. 若曲线 C 表示焦点在 x 轴上的双曲线，则 C 的焦距为 $2\sqrt{3}$

B. 若曲线 C 表示椭圆，则 k 的取值范围是 $(3,6)$

C. 若 $k=2$，则 C 的焦点坐标是 $(\sqrt{3},0)$ 和 $(-\sqrt{3},0)$

D. 若 $k=5$，则 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$

11. 已知圆 $C_1:(x+2)^2+(y-1)^2=4$ 与圆 $C_2:x^2+y^2+4x+4my+4m^2=0(m\in\mathbf{R})$，则

A. 若圆 C_2 与 x 轴相切，则 $m=\pm2$

B. 若 $m=1$，则圆 C_1 与圆 C_2 相交

C. 当 $m=\frac{1}{2}$ 时，两圆的公共弦长为 $\sqrt{3}$

D. 直线 $kx-y+3k+2=0$ 与圆 C_1 始终有两个交点

12. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左顶点为 A，左、右焦点分别为 F_1,F_2，点 $M(\sqrt{3},2)$ 在 C 上，且直线 AM 的斜率为 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$. 点 P 是椭圆 C 上的动点，则

A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. 若 $|AP|>\sqrt{15}$，则点 P 的横坐标的取值范围是 $(-1,3)$

C. $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围为 $[3,6]$

D. C 上有且只有 4 个点 P，使得 $\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知空间向量 $\boldsymbol{a}=(0,6,0)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为_________.

14. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为6，F_1，F_2 是椭圆 C 的两个焦点，点 M 在 C 上，若 $|MF_1|\cdot|MF_2|$ 的最大值为16，则椭圆 C 的离心率为_________.

15. 已知直线 $x+y+m=0(m\in\mathbf{R})$ 与圆 $C:x^2+(y-2)^2=9$ 交于 A，B 两点，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为_________.

16. 已知 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，过点 F_2 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 与双曲线 C 的右支交于 P，Q 两点，若 $\triangle F_1PQ$ 是等腰三角形，则双曲线 C 的离心率为_________.

四、解答题：共70分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. (10分) 【公众号：快思维小初高学习资料库】

已知在 $\triangle ABC$ 中，边 BC 和 AC 所在的直线方程分别为 $3x+y-10=0$ 和 $x+y-2=0$，边 AB 的中点为 $Q\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{2}\right)$.

(Ⅰ)求点 A，B 的坐标；

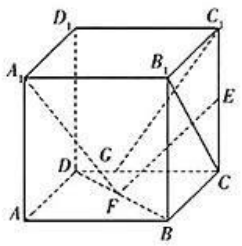
(Ⅱ)求 BC 边上的中线所在的直线 l 的方程.

18. (12分)

如图，在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，线段 DB 的中点为 F，点 G 在棱 CD 上，且满足 $CG=2GD$.

(Ⅰ)若 E 为棱 CC_1 的中点，求证：$EF\perp B_1C$；

(Ⅱ)求直线 A_1F 与 C_1G 所成角的余弦值.



19. (12分)

已知圆 $M:(x-3)^2+y^2=r^2(r>0)$ 过点 $T(0,4)$，且圆 M 关于直线 $l:x-y-1=0$ 对称的圆为圆 C.

(Ⅰ)求圆 C 的方程；

(Ⅱ)若过点 $P(4,-4)$ 的直线 l' 被圆 C 截得的弦长为8，求直线 l' 的方程.

20. (12分)

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，直线 $x-y-2=0$ 与抛物线 C 相交于 A，B 两点，且 $|AB|=4\sqrt{6}$.

(Ⅰ)求抛物线 C 的方程；

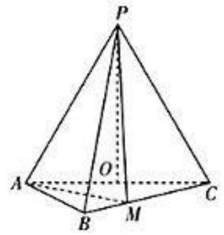
(Ⅱ)若点 P 的坐标为 $(-2,4)$，过抛物线焦点的直线 l 交 C 于 M，N 两点，求 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最小值.

21. (12分)

如图，在三棱锥 $P-ABC$ 中，$\triangle ABC$ 是斜边为 AC 的等腰直角三角形，$\triangle PAC$ 是边长为4的等边三角形，且 $PB=4$，O 为棱 AC 的中点.

(Ⅰ)证明：$PO\perp$ 平面 ABC.

(Ⅱ)问：在棱 BC 上是否存在点 M(不与棱 BC 的端点重合)，使得平面 PAM 与平面 PAC 的夹角为30°？若存在，指出点 M 的位置；若不存在，请说明理由.



22. (12分)

已知椭圆 $E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，左顶点为 $(-\sqrt{3},0)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

(Ⅰ)求 E 的方程；

(Ⅱ)若过坐标原点 O 且斜率为 $k(k\neq0)$ 的直线 l 与 E 交于 A，B 两点，直线 AF 与 E 的另一个交点为 C，$\triangle ABC$ 的面积为 $\dfrac{4\sqrt{6}}{5}$，求直线 AF 的方程.

“天一大联考·皖豫名校联盟”
2022—2023 学年(上)高二年级阶段性测试(二)

数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案　D

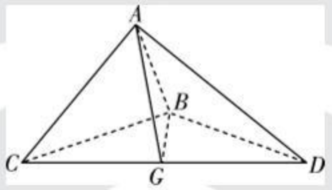
命题意图　本题考查直线在 x 轴和 y 轴上的截距.

解析　由题可知直线 l 与两坐标轴的交点分别为 $(0,-2)$,$(2,0)$,所以该直线与两坐标轴围成的三角形的面积是 $\frac{1}{2}\times2\times2=2$.

2. 答案　A

命题意图　本题考查空间向量的运算.

解析　因为 $\overrightarrow{CG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$,故 G 为 CD 的中点,如图,由平行四边形法则可得 $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BG}$,所以 $2\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC})=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})=2\overrightarrow{AG}$.



3. 答案　D

命题意图　本题考查直线与圆的位置关系.

解析　圆 $(x+1)^2+(y+2)^2=9$ 的圆心为 $(-1,-2)$,依题意,点 $(-1,-2)$ 在直线 $ax+by+1=0$ 上,因此 $-a-2b+1=0$,即 $a+2b=1$,又 $a+b+1=0$,所以 $a=-3$,$b=2$.

4. 答案　B

命题意图　本题考查直线的斜率.

解析　过点 C 的直线与线段 AB 相交,$k_{AC}=\frac{2-0}{-1-1}=-1$,$k_{BC}=\frac{8-0}{5-1}=2$,又该直线与 x 轴垂直时,斜率不存在,所以该直线的斜率的取值范围是为 $(-\infty,-1]\cup[2,+\infty)$.

5. 答案　D

命题意图　本题考查两圆的位置关系.

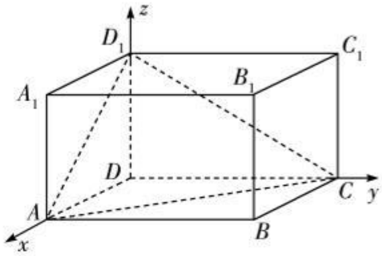
解析　将 $x^2+y^2-4mx+4m^2-4=0$ 化为标准方程得 $(x-2m)^2+y^2=4$,即圆心为 $(2m,0)$,半径为 2,圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 的圆心为 $(0,-1)$,半径为 1. 因为圆 $x^2+(y+1)^2=1$ 与圆 $x^2+y^2-4mx+4m^2-4=0$ 有且仅有一条公切线,所以两圆的位置关系为内切,所以 $\sqrt{4m^2+1}=1$,即 $m^2=0$,解得 $m=0$.

6. 答案　C

命题意图　本题考查空间向量的应用.

解析　以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DA}$,$\overrightarrow{DC}$,$\overrightarrow{DD_1}$ 的方向为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$C(0,2,0)$,$D(0,0,0)$,$D_1(0,0,1)$,$\therefore\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,2,0)$,$\overrightarrow{AD_1}=(-1,0,1)$. 设平面 ACD_1 的

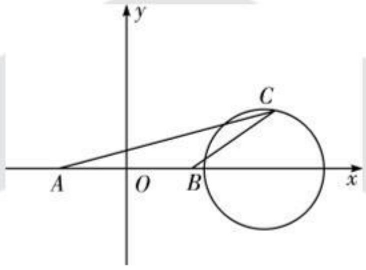
法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=-x+2y=0,\\ \overrightarrow{AD_1}\cdot\boldsymbol{n}=-x+z=0,\end{cases}$ 令 $y=1$，解得 $x=2,z=2$，$\therefore\boldsymbol{n}=(2,1,2)$. $\because|\cos\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{AD}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{1\times3}=\dfrac{2}{3}$，$BC/\!/AD$，$\therefore$ 直线 BC 与平面 ACD_1 所成角的余弦值为 $\sqrt{1-\cos^2\langle\overrightarrow{AD},\boldsymbol{n}\rangle}=\dfrac{\sqrt5}{3}$.



7. **答案**　B

命题意图　本题考查圆的实际应用.

解析　以点 A,B,C 分别表示甲、乙、丙地，以线段 AB 的中点 O 为原点，线段 AB 所在直线为 x 轴，线段 AB 的垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系，如图，则 $A(-6,0)$，$B(6,0)$，设点 $C(x,y)$，则 $|AC|=\sqrt2|BC|$，即 $\sqrt{(x+6)^2+y^2}=\sqrt2\cdot\sqrt{(x-6)^2+y^2}$，整理可得 $(x-18)^2+y^2=288$，$\therefore$ 点 C 的轨迹是以点 $(18,0)$ 为圆心，$12\sqrt2$ 为半径的圆除去与 x 轴的交点后所得曲线，$\therefore S_{\triangle ABC}\leqslant\dfrac12\times12\times12\sqrt2=72\sqrt2(\text{km}^2)$.



8. **答案**　A

命题意图　本题考查抛物线的性质.

解析　抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 $F(1,0)$，准线的方程为 $l:x=-1$. 因为点 M 在 C 上，设 $M\left(\dfrac{y^2}{4},y\right)$. 由题可得 $|MF|=|MP|=|MQ|$，则 $MP\perp l$，即 $MP/\!/x$ 轴，又因为 $\triangle MFQ\cong\triangle MPF$，所以 $\triangle MFQ$ 与 $\triangle MPF$ 均为等边三角形. 不妨设 $y>0$，则 MF 所在的直线方程为 $y=\sqrt3(x-1)$. 将 $M\left(\dfrac{y^2}{4},y\right)$ 代入，得 $y=\sqrt3\left(\dfrac{y^2}{4}-1\right)$，解得 $y=2\sqrt3$，所以点 M 的横坐标为 3，$|MF|=3+1=4$.

二、多项选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. **答案**　ABC

命题意图　本题考查空间向量的坐标运算.

解析　由已知可得 $\overrightarrow{AB}=(2,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,2,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-3,1,1)$. 因为 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-2+2=0$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{AC}$ 互相垂直，故 A 正确；$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{11}$，所以与 $\overrightarrow{BC}$ 方向相反的单位向量的坐标是 $-\dfrac{1}{\sqrt{11}}(-3,1,1)=\left(\dfrac{3\sqrt{11}}{11},-\dfrac{\sqrt{11}}{11},-\dfrac{\sqrt{11}}{11}\right)$，故 B 正确；$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=3+2+1=6$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{11}$，$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt6$，所以 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\rangle=$

— 2 —

$\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BC}|}=\frac{6}{\sqrt{6}\times\sqrt{11}}=\frac{\sqrt{66}}{11}$,故 C 正确;$\overrightarrow{BC}$在$\overrightarrow{AB}$上的投影向量的模为$\left|\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right|=\frac{|-5|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,故 D 错误.

10. **答案** AC

命题意图 本题考查圆锥曲线的性质.

解析 由题可得 $6-k>0,k-3>0$,解得 $3<k<6$,则 $a=\sqrt{6-k},b=\sqrt{k-3},c=\sqrt{3}$,则 C 的焦距为 $2\sqrt{3}$,A 正确;因为 $6-k>3-k$,若曲线 C 表示椭圆,则 $6-k>3-k>0\Rightarrow k<3$,B 错误;当 $k=2$ 时,曲线 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$,则 $a^2=4,b^2=1$,则 $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3}$,所以 C 的焦点坐标是$(\sqrt{3},0)$和$(-\sqrt{3},0)$,C 正确;当 $k=5$ 时,曲线 $C:x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 表示双曲线,则其渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$,D 错误.

11. **答案** BD

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系及圆与圆的位置关系.

解析 由题可知圆 $C_2:(x+2)^2+(y+2m)^2=4$. 若圆 C_2 与 x 轴相切,则有$|2m|=2$,所以 $m=\pm1$,故 A 错误;当 $m=1$ 时,$0<|C_1C_2|=\sqrt{0^2+3^2}=3<4$,两圆相交,故 B 正确;当 $m=\frac{1}{2}$时,两圆的方程相减可得公共弦所在直线的方程为 $y=0$,圆心 C_1 到直线 $y=0$ 的距离为 1,所以两圆的公共弦长为 $2\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$,故 C 错误;直线 $kx-y+3k+2=0$ 过定点$(-3,2)$,而$(-3+2)^2+(2-1)^2=2<4$,故点$(-3,2)$在圆 C_1 内部,所以直线 $kx-y+3k+2=0$ 与圆 C_1 始终有两个交点,故 D 正确.

12. **答案** CD

命题意图 本题考查椭圆的方程与性质.

解析 由题意可知直线 AM 的方程为 $y-2=\frac{3-\sqrt{3}}{3}(x-\sqrt{3})$,令 $y=0$,可得 $x=-3$,则 $a=3$,又椭圆 C 过点 $M(\sqrt{3},2)$,所以$\frac{3}{9}+\frac{4}{b^2}=1$,解得 $b^2=6$,所以 C 的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$. 设椭圆 C 的半焦距为 $c(c>0)$,则 $c=\sqrt{3}$,椭圆 C 的离心率为$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故 A 错误;当点 P 为椭圆 C 的上下顶点时,$|AP|=\sqrt{15}$,所以若$|AP|>\sqrt{15}$,则点 P 的横坐标的取值范围是$(0,3]$,故 B 错误;设 $P(x_0,y_0)$,$|y_0|\leqslant\sqrt{6}$,则$\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{6}=1$,所以 $x_0^2=9\left(1-\frac{y_0^2}{6}\right)$,又 $F_1(-\sqrt{3},0),F_2(\sqrt{3},0)$,则$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-\sqrt{3}-x_0)(\sqrt{3}-x_0)+(0-y_0)^2=x_0^2+y_0^2-3=6-\frac{1}{2}y_0^2$,因为$|y_0|\leqslant\sqrt{6}$,所以$y_0^2\in[0,6]$,所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}\in[3,6]$,故 C 正确;分析可知,当点 P 为椭圆 C 的上下顶点时$\angle F_1PF_2$ 最大,此时$\angle F_1PF_2$ 为锐角,所以以点 P 为直角顶点的$\triangle PF_1F_2$ 不存在,以点 F_1,F_2 为直角顶点的$\triangle PF_1F_2$ 分别有 2 个,所以 C 上有且只有 4 个点 P,使得$\triangle PF_1F_2$ 是直角三角形,故 D 正确.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. **答案** $\frac{2\pi}{3}$

命题意图 本题考查空间向量夹角的求解.

解析 由题可知$|\boldsymbol{a}|=6$,因为$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2\sqrt{7}$,所以$\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2=36+4\times6\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle+4=28$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$,又$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$.

14. 答案 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

命题意图 本题考查椭圆的性质及基本不等式.

解析 因为$|MF_1|+|MF_2|=2a$,所以$|MF_1|\cdot|MF_2|\leqslant\left(\frac{|MF_1|+|MF_2|}{2}\right)^2=a^2=16$(当且仅当$|MF_1|=|MF_2|=4$时,等号成立). 由题可知$2b=6$,所以$b=3$,又$a^2=b^2+c^2$,解得$c=\sqrt{7}$,所以$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

15. 答案 $\frac{9}{2}$

命题意图 本题考查直线与圆的位置关系.

解析 圆$C:x^2+(y-2)^2=9$的圆心坐标为$(0,2)$,半径$r=3$. 由圆心到直线$x+y+m=0$的距离$d=\frac{|2+m|}{\sqrt{2}}<3$,解得$-3\sqrt{2}-2<m<3\sqrt{2}-2$. 直线$x+y+m=0$被圆截得的弦长为$2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-\left(\frac{|2+m|}{\sqrt{2}}\right)^2}=2\sqrt{9-\frac{(2+m)^2}{2}}$,所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}\times2\sqrt{9-\frac{(2+m)^2}{2}}\times\frac{|2+m|}{\sqrt{2}}=\sqrt{\left[9-\frac{(2+m)^2}{2}\right]\times\frac{(2+m)^2}{2}}\leqslant\frac{1}{2}\times\left[9-\frac{(2+m)^2}{2}+\frac{(2+m)^2}{2}\right]=\frac{9}{2}$,当且仅当$9-\frac{(2+m)^2}{2}=\frac{(2+m)^2}{2}$,即$m=-5$或1时取"=".

16. 答案 $\frac{\sqrt{13}-1}{2}$

命题意图 本题考查双曲线的性质及直线与双曲线的位置关系.

解析 不妨设点P在第一象限,双曲线C的半焦距为$c(c>0)$,因为l与C的右支有两个交点,C的一条渐近线的斜率$\frac{b}{a}<\sqrt{3}$,则C的离心率$e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}<2$. 若$|QF_1|=|PQ|$,根据双曲线的定义知$|QF_1|-|QF_2|=2a$,所以$|PQ|-|QF_2|=|PF_2|=2a$,所以$|PF_1|=2a+|PF_2|=4a$,$|F_1F_2|=2c$. 由题可知$\angle F_1F_2P=120°$,在$\triangle PF_1F_2$中,由余弦定理可得$16a^2=4a^2+4c^2+2\times2a\times2c\times\frac{1}{2}$,整理得$c^2+ca-3a^2=0$,即$e^2+e-3=0$,解得$e=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$(负值舍去),此时$e<2$满足条件. 若$|PF_1|=|PQ|$,则与上面的分析类似可得$|QF_1|=4a$,$|QF_2|=2a$,在$\triangle QF_1F_2$中,$\angle F_1F_2Q=60°$,再由余弦定理求得$e=\frac{\sqrt{13}+1}{2}$,此时$e>2$不满足条件.

综上可得$e=\frac{\sqrt{13}-1}{2}$.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查两直线的位置关系及直线方程的求解.

解析 (Ⅰ)因为边AB的中点为$Q\left(\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$,

设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

则$\begin{cases}x_1+y_1-2=0,\\3x_2+y_2-10=0,\\x_1+x_2=1,\\y_1+y_2=7,\end{cases}$解得$\begin{cases}x_1=-1,\\x_2=2,\\y_1=3,\\y_2=4,\end{cases}$

即 $A(-1,3)$，$B(2,4)$. ……………………………………………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）设边 BC 的中点为 G.

由于边 BC 和 AC 所在的直线方程分别为 $3x+y-10=0$ 和 $x+y-2=0$，

所以两直线方程联立，解得 $x=4$，$y=-2$，即 C 点的坐标为 $(4,-2)$. ……………………………（7 分）

又 B 点的坐标为 $(2,4)$，所以 G 点的坐标为 $(3,1)$. ……………………………………………（8 分）

又 A 点的坐标为 $(-1,3)$，

所以直线 l 的方程为 $y-1=\frac{3-1}{-1-3}(x-3)$，即 $x+2y-5=0$. ……………………………………（10 分）

18. **命题意图** 本题考查空间向量的应用.

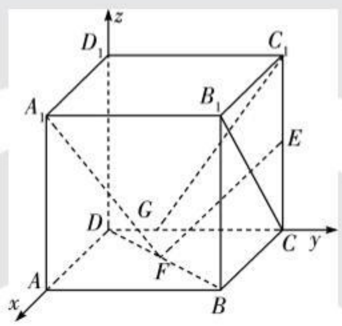
解析 （Ⅰ）如图，以 D 为原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴，建立空间直角坐标系 $Dxyz$，

则 $E(0,2,1)$，$B_1(2,2,2)$，$C(0,2,0)$，$F(1,1,0)$. ……………………………………………………（2 分）

因为 $\overrightarrow{EF}=(1,-1,-1)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-2,0,-2)$，

所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{B_1C}=(1,-1,-1)\cdot(-2,0,-2)=-2+0+2=0$， …………………………………（4 分）

所以 $\overrightarrow{EF}\perp\overrightarrow{B_1C}$，故 $EF\perp B_1C$. ……………………………………………………………（6 分）



（Ⅱ）由（Ⅰ）中的坐标系及题意可知 $A_1(2,0,2)$，$C_1(0,2,2)$，$F(1,1,0)$，$G\left(0,\frac{2}{3},0\right)$. …………………（7 分）

因为 $\overrightarrow{A_1F}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{C_1G}=\left(0,-\frac{4}{3},-2\right)$，

所以 $\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{C_1G}=(-1,1,-2)\cdot\left(0,-\frac{4}{3},-2\right)=-\frac{4}{3}+4=\frac{8}{3}$， ……………………………（9 分）

又 $|\overrightarrow{A_1F}|=\sqrt{6}$，$|\overrightarrow{C_1G}|=\frac{2\sqrt{13}}{3}$， ……………………………………………………………（10 分）

所以 $\cos\langle\overrightarrow{A_1F},\overrightarrow{C_1G}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1F}\cdot\overrightarrow{C_1G}}{|\overrightarrow{A_1F}||\overrightarrow{C_1G}|}=\frac{\frac{8}{3}}{\sqrt{6}\times\frac{2\sqrt{13}}{3}}=\frac{2\sqrt{78}}{39}$，

故直线 A_1F 与 C_1G 所成角的余弦值为 $\frac{2\sqrt{78}}{39}$. …………………………………………………（12 分）

19. **命题意图** 本题考查直线与圆的方程的求解.

解析 （Ⅰ）由题可知 $M(3,0)$. ……………………………………………………………………（1 分）

因为圆 M 过点 $T(0,4)$，所以 $r^2=3^2+4^2=25$，故 $r=5$. ……………………………………………（2 分）

设 M 关于直线 l 的对称点 C 的坐标为 (a,b)，

则$\begin{cases}\dfrac{a+3}{2}-\dfrac{b}{2}-1=0,\\ \dfrac{b}{a-3}=-1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\ b=2,\end{cases}$ …………………………………………………………………………（4 分）

所以圆 C 的方程为$(x-1)^2+(y-2)^2=25$. …………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）因为过点 $P(4,-4)$ 的直线 l' 被圆 C 截得的弦长为 8，故圆心 $C(1,2)$ 到直线 l' 的距离为 $\sqrt{5^2-4^2}=3$.

…………………………………………………………………………………………（8 分）

（ⅰ）当直线 l' 的斜率不存在时，其方程为 $x=4$，满足题意； ………………………………（9 分）

（ⅱ）当直线 l' 的斜率存在时，可设其方程为 $y+4=k(x-4)$，即 $kx-y-4k-4=0$，

所以圆心 $C(1,2)$ 到 l' 的距离为$\dfrac{|-3k-6|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=-\dfrac{3}{4}$. ……………………………（11 分）

综上所述，直线 l' 的方程为 $x=4$ 或 $3x+4y+4=0$. ……………………………………（12 分）

20. **命题意图** 本题考查抛物线的方程与性质及直线与抛物线的位置关系.

解析 （Ⅰ）设点 A,B 的横坐标分别为 x_A,x_B.

由$\begin{cases}x-y-2=0,\\ y^2=2px,\end{cases}$ 可得 $x^2-(4+2p)x+4=0$. …………………………………（1 分）

$\therefore x_A+x_B=4+2p,x_Ax_B=4$. ……………………………………………………（2 分）

$\therefore |AB|=\sqrt{1+1^2}|x_A-x_B|=\sqrt{2}\times\sqrt{(x_A+x_B)^2-4x_Ax_B}=\sqrt{2}\times\sqrt{(4+2p)^2-16}=4\sqrt{6}$，

解得 $p=2$（负值舍去）， ………………………………………………………………（4 分）

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. …………………………………………………（5 分）

（Ⅱ）设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$.

由题意知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为$(1,0)$，直线 l 的斜率不等于 0，

故可设直线 l 的方程为 $x=ty+1$，

由$\begin{cases}y^2=4x,\\ x=ty+1,\end{cases}$ 可得 $y^2-4ty-4=0$， ……………………………………（7 分）

由根与系数的关系得 $y_1+y_2=4t,y_1y_2=-4$， ………………………………………（8 分）

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}&=(x_1+2)(x_2+2)+(y_1-4)(y_2-4)\\&=x_1x_2+2(x_1+x_2)+4+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16\\&=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}+2\left(\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{4}\right)+4+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16\\&=\frac{(y_1y_2)^2}{16}+\frac{1}{2}[(y_1+y_2)^2-2y_1y_2]+4+y_1y_2-4(y_1+y_2)+16 \quad\text{…………（10 分）}\\&=\frac{(-4)^2}{16}+\frac{1}{2}[(4t)^2+8]+4-4-16t+16=8t^2-16t+21=8(t-1)^2+13,\end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $t=1$ 时，$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 取得最小值，且最小值为 13. ……………………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查线面垂直的证明及平面与平面的夹角的余弦值的求解.

解析 （Ⅰ）由题可知 $AB\perp BC,AB=BC$，且 $AC=4$，

$\therefore AB=BC=2\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………………… (1 分)

连接 BO,如图,

则 $BO\perp AC$,且 $BO=2$. ……………………………………………………………………… (2 分)

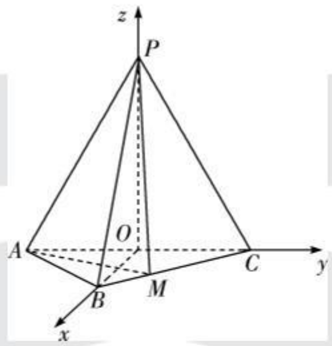
$\because$ $\triangle PAC$ 是边长为 4 的等边三角形,

$\therefore PA=PC=AC=4$,$PO\perp AC$,且 $PO=2\sqrt{3}$. ………………………………………… (3 分)

从而有 $PB^2=PO^2+BO^2$,

故 $PO\perp OB$. ……………………………………………………………………………………… (4 分)

$\because OB\cap AC=O$,$\therefore PO\perp$ 平面 ABC. …………………………………………………… (5 分)



(Ⅱ)假设存在满足题意的点 M.

由(Ⅰ)可知,可以 O 为坐标原点,OB,OC,OP 所在直线分别为 x,y,z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(0,-2,0)$,$P(0,0,2\sqrt{3})$,$C(0,2,0)$,$B(2,0,0)$,

$\overrightarrow{BA}=(-2,-2,0)$,$\overrightarrow{PA}=(0,-2,-2\sqrt{3})$,$\overrightarrow{BC}=(-2,2,0)$. ………………………… (6 分)

设 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BC}=(-2\lambda,2\lambda,0)$,$0<\lambda<1$,

则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BM}-\overrightarrow{BA}=(-2\lambda,2\lambda,0)-(-2,-2,0)=(2-2\lambda,2\lambda+2,0)$. ……………… (7 分)

设平面 AMP 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=-2y-2\sqrt{3}z=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AM}=(2-2\lambda)x+(2\lambda+2)y=0,\end{cases}$

令 $z=1$,得 $\boldsymbol{n}=\left(\dfrac{\sqrt{3}(\lambda+1)}{1-\lambda},-\sqrt{3},1\right)$. ……………………………………………… (9 分)

易知平面 PAC 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(1,0,0)$. ……………………………………………… (10 分)

$\because$ 平面 PAM 与平面 PAC 的夹角为 30°,

$\therefore \cos30^\circ=\left|\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}(\lambda+1)}{1-\lambda}}{1\times\sqrt{\left[\dfrac{\sqrt{3}(\lambda+1)}{1-\lambda}\right]^2+1+3}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, ……………………………… (11 分)

解得 $\lambda=\dfrac{1}{3}$ 或 $\lambda=3$(舍去),

$\therefore$ 点 M 在棱 BC 的靠近点 B 的三等分点处. ………………………………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查椭圆的方程与性质及直线与椭圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)设椭圆 E 的半焦距为 $c(c>0)$.

因为椭圆 E 的左顶点为$(-\sqrt{3},0)$，所以 $a=\sqrt{3}$. …………………………………………………………………… (1 分)

又离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $c=1$. ………………………………………………………………………… (2 分)

所以 $b^2=a^2-c^2=2$， ……………………………………………………………………………………… (3 分)

所以 E 的方程为$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$. ………………………………………………………………………… (4 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知，左焦点 F 的坐标为$(-1,0)$.

当直线 AF 垂直于 x 轴时，易知点 A 的坐标为$\left(-1,\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

由椭圆的对称性知，点 A,B 关于原点 O 对称，

所以 $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOC}=2\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{4\sqrt{3}}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，与题意不符. ……………………………………… (6 分)

所以直线 AF 的斜率存在，设其方程为 $x=ty-1$.

由$\begin{cases}x=ty-1,\\2x^2+3y^2=6,\end{cases}$ 消去 x 并整理得$(2t^2+3)y^2-4ty-4=0$. ……………………………………… (8 分)

设 $A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$，

则 $y_1+y_2=\frac{4t}{2t^2+3}$，$y_1y_2=\frac{-4}{2t^2+3}$，

所以$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(\frac{4t}{2t^2+3}\right)^2+\frac{16}{2t^2+3}}=\frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2+1}}{2t^2+3}$. ……………………… (10 分)

因此 $S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}|OF||y_1-y_2|=\frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{t^2+1}}{2t^2+3}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，

解得 $t^2=1$，即 $t=\pm1$，

所以直线 AF 的方程为 $x-y+1=0$ 或 $x+y+1=0$. ……………………………………………………………… (12 分)

关于我们