天一大联考
2021 届高中毕业班考前定位联合考试
理科数学·答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查集合的交集.

解析 由$\begin{cases}|y|=x^2,\\x^2+y^2=2\end{cases}$可得$\begin{cases}x=-1,\\y=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=-1\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1,\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=1,\\y=1,\end{cases}$故 $A\cap B$ 中含有 4 个元素.

2. 答案 B

命题意图 本题考查空间中直线的位置关系.

解析 画图可知，$MN//CD_1$，$CD_1//BA_1$，$\therefore MN//BA_1$. $\because MN//CD_1$，$CD_1\perp$平面 AB_1C_1D，$\therefore MN\perp$平面 AB_1C_1D，$\therefore MN\perp DB_1$，$MN\perp AC_1$. $\therefore$ 满足条件的直线有 2 条.

3. 答案 A

命题意图 本题考查正弦定理的应用.

解析 因为 $4a\sin B=\sqrt{3}b\cos A+b\sin A$，所以由正弦定理可得 $4\sin A\sin B=\sqrt{3}\sin B\cos A+\sin B\sin A$，因为 B 为三角形内角，所以 $\sin B\neq 0$，所以 $4\sin A=\sqrt{3}\cos A+\sin A$，即 $3\sin A=\sqrt{3}\cos A$，可得 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$，因为 $0<A<\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

4. 答案 A

命题意图 本题考查复数的运算及充要条件.

解析 $\because z=\frac{1+2i}{1+i}=\frac{(1+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i+2i+2}{1+1}=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$，$\therefore \left|\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i+bi\right|=\left|\frac{3}{2}+\left(b+\frac{1}{2}\right)i\right|=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2}\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}$，$\therefore -1\leqslant b\leqslant 0$. 分析选项可知只有 A 正确.

5. 答案 D

命题意图 本题考查平均数及中位数.

解析 4 人的平均年收入为 25 万，中位数为 20 万，则中位数对平均数的占比为$\frac{20}{25}=0.8$，由表可知对应的基尼系数为 0.363.

6. 答案 B

命题意图 本题考查函数模型的应用.

解析 2021 年的自投资金为 $5\ 000\times1.1^5\approx5\ 000\times1.6=8\ 000$，2021 年的扶贫资金为 $30\ 000-5\times5\ 000=5\ 000$，所以该贫困户 2021 年的年总收入约为 $1\ 200+4.1\times5\ 000+4.3\times8\ 000+900\times2=57\ 900$(元).

7. 答案 C

命题意图 本题考查导数的几何意义.

解析 由题可知 $y'=x^2-2x$，则曲线在点 $x=a$ 处的切线的斜率 $k=y'|_{x=a}=a^2-2a$. 由题可知 $a^2-2a=1-b\Rightarrow b=-a^2+2a+1=-(a-1)^2+2$，当 $a=1$ 时，b 的最大值为 2.

8. 答案　D

命题意图　本题考查抛物线的定义及直线与抛物线的位置关系.

解析　由题意,得 $F(1,0)$. 又因为 $k=\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$,故直线 AB 的方程为 $x=\sqrt{3}y+1$,与抛物线方程 $y^2=4x$ 联立,得 $y^2-4\sqrt{3}y-4=0$. 设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4\sqrt{3}$,$x_1+x_2=\sqrt{3}(y_1+y_2)+2=14$,所以 $Q(7,2\sqrt{3})$. 过 P 作 PH 垂直于准线于点 H,根据抛物线的定义,得 $|PF|+|PQ|=|PH|+|PQ|\geqslant|QH|\geqslant 7+1=8$.

9. 答案　C

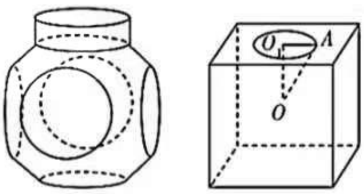
命题意图　本题考查三角函数的图象与性质.

解析　由题意可得 $g(x)=4\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1$,$g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8},m\right]$ 上的值域为 $[-1,3]$ 时,$0\leqslant\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$,当 $x\in\left[-\frac{\pi}{8},m\right]$ 时,$2x+\frac{\pi}{4}\in\left[0,2m+\frac{\pi}{4}\right]$,而当 $x\in[0,\pi]$ 时,$y=\sin x\in[0,1]$,$\therefore \frac{\pi}{2}\leqslant 2m+\frac{\pi}{4}\leqslant\pi$,$\therefore \frac{\pi}{8}\leqslant m\leqslant\frac{3\pi}{8}$.

10. 答案　A

命题意图　本题考查几何体的三视图及体积的计算.

解析　由三视图可知该储糖罐的形状如图(1)所示. 设截面圆半径为 r,球的半径为 R,由题可知球心到某一截面的距离为正方体棱长的一半,即为 4,$r=3$,故 $R^2=3^2+4^2=25$,得 $R=5$,所以球的体积 $V_1=\frac{4}{3}\pi\times 5^3=\frac{500}{3}\pi$. 如图(2),$OA=R=5$,且 $OO_1=4$,则球缺的高 $h=R-OO_1=1$,一个球缺的体积 $V_2=\frac{1}{3}\pi h^2(3R-h)=\frac{14}{3}\pi$,上面圆柱的体积为 $V_3=\pi\times 3^2\times 1=9\pi$,所以该储糖罐的体积 $V=V_1-6V_2+V_3=\frac{443}{3}\pi$.



图(1)　　图(2)

11. 答案　A

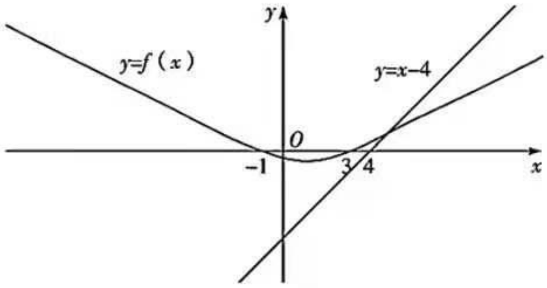
命题意图　本题考查双曲线的性质及圆的标准方程.

解析　由 $y=\frac{2x+2}{x-1}=2+\frac{4}{x-1}$ 可知此双曲线是由双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 平移得来的,对称中心为 $(1,2)$,双曲线 $y=\frac{4}{x}$ 绕原点顺时针转动 45°,就会得到双曲线 $x^2-y^2=8$,所以焦距为 8,所以所求圆的标准方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=16$.

12. 答案　C

命题意图　本题考查导数在函数零点问题中的应用.

解析　由题可知 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=\frac{e^{x-1}}{e^{x-1}+1}-\frac{1}{2}=\frac{2e^{x-1}-e^{x-1}-1}{2(e^{x-1}+1)}=\frac{e^{x-1}-1}{2(e^{x-1}+1)}$,当 $x>1$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增;当 $x<1$ 时 $f'(x)<0$,$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减. 令 $f(x)=0$,可得 $x=3$ 或 -1. 因为函数 $g(x)$ 恰有 2 个零点,结合图象(如图),可知 $-1<\lambda\leqslant 3$ 或 $\lambda>4$.



二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 答案　-6

命题意图　本题考查向量的数量积.

解析　由题意，$A(0,0)$，$B(4,1)$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2-4)^2+(t-1)^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore t=3$，$C(2,3)$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=(4,1)\cdot(-2,2)=-6$.

14. 答案　-14

命题意图　本题考查二项式定理.

解析　因为 $\left(x-\frac{1}{x}\right)(1-x)^7=x(1-x)^7-\frac{1}{x}(1-x)^7$，所以 x^3 的系数为 $C_7^2(-1)^2-C_7^4(-1)^4=-14$.

15. 答案　$\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$

命题意图　本题考查同角三角函数关系.

解析　$\sqrt{1-2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}+\sqrt{1+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}-2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2}}+\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}+2\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}+\cos^2\frac{1}{2}}$

$=\sqrt{\left(\sin\frac{1}{2}-\cos\frac{1}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\right)^2}$

$=\cos\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{2}+\sin\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}$

$=2\cos\frac{1}{2}=a$，则 $\cos\frac{1}{2}=\frac{a}{2}$，而 $1+\tan^2\frac{1}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}}$，$\therefore \tan^2\frac{1}{2}=\frac{4}{a^2}-1$，

又 $\tan\frac{1}{2}>0$，$\therefore \tan\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{4}{a^2}-1}=\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}$.

16. 答案　②③

命题意图　本题考查数学文化.

解析　曲线 $D:|x|+|y|=a$ 的周长为 $4\sqrt{2}a<6a$，所以①错误；曲线 C 上左右两端点 $(-a,0)$，$(a,0)$ 或上下两端点 $(0,a)$，$(0,-a)$ 的距离最远，等于 $2a$，②正确；曲线 C 上一点到原点的最短距离为 $\frac{1}{2}a$，此类点共有 4 个，故曲线 C 与圆 $x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ 有且仅有 4 个公共点，③正确；不妨设点 $P(x,y)$ 为第一象限上的点，则 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\geqslant 2\sqrt{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}=2x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}$，$\therefore xy\leqslant\frac{a^2}{8}$，④错误.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17. 命题意图　本题考查等比数列的通项公式及错位相减法.

解析　（Ⅰ）由 $\begin{cases}6a_1=a_2+a_3,\\ a_2=4,\end{cases}$ ……………………………………………………（2 分）

解得 $a_1=q=2$,所以 $a_n=2^n$. ……………………………………………………………… (3 分)

当 $n\geqslant2$ 时,$b_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{n(n+1)}{2}-\dfrac{n(n-1)}{2}=n$, ……………………………………… (5 分)

又 $b_1=S_1=1$ 也符合上式,所以 $b_n=n$. ……………………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 $a_nb_n=n\cdot2^n$.

设 $T=1\cdot2^1+2\cdot2^2+3\cdot2^3+\cdots+n\cdot2^n$,

则 $2T=1\cdot2^2+2\cdot2^3+3\cdot2^4+\cdots+(n-1)\cdot2^n+n\cdot2^{n+1}$, ……………………………………… (7 分)

两式相减得 $-T=2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\cdot2^{n+1}=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}-n\cdot2^{n+1}=(1-n)\cdot2^{n+1}-2$.

$\therefore T=(n-1)\cdot2^{n+1}+2$. ……………………………………………………………… (9 分)

$\because (n+m)a_{n+1}=n\cdot2^{n+1}+m\cdot2^{n+1}\geqslant(n-1)\cdot2^{n+1}+2$,

即 $m\geqslant-1+\dfrac{1}{2^n}$对任意正整数 n 恒成立, ……………………………………………… (10 分)

当 $n=1$ 时,$-1+\dfrac{1}{2^n}$取最大值 $-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore m\geqslant-\dfrac{1}{2}$,

$\therefore m$ 的最小值为 $-\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………… (12 分)

18. **命题意图** 本题考查空间线面位置关系及利用空间向量求二面角的余弦值.

解析 (Ⅰ)如图,过 E 点作 $EF/\!/A_1A$ 交 A_1C 于点 F,连接 DF.

$\because BB_1/\!/A_1A$,$\therefore EF/\!/BB_1$,$\therefore EF$ 与 BB_1 确定一个平面. ……………………………… (2 分)

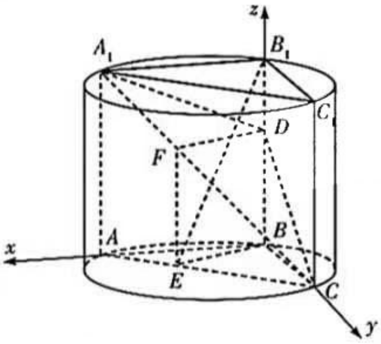
$\because BE/\!/$平面 A_1CD,平面 $A_1CD\cap$平面 $DBEF=DF$,$\therefore BE/\!/DF$.

$\therefore$ 四边形 $DBEF$ 为平行四边形,$\therefore DB=EF$. ……………………………………………… (4 分)

又$\dfrac{AC}{AE}=3$,$\therefore\dfrac{EF}{A_1A}=\dfrac{CE}{AC}=\dfrac{2}{3}$,

$\therefore\dfrac{BD}{B_1B}=\dfrac{EF}{A_1A}=\dfrac{2}{3}$,$\dfrac{B_1D}{BB_1}=\dfrac{1}{3}$. ……………………………………………… (6 分)

(Ⅱ)由题意知 BA,BC,BB_1 两两垂直,所以以 B 为原点建立如图所示的空间直角坐标系.



设 $BA=BC=BB_1=2$,则 $B(0,0,0)$,$B_1(0,0,2)$,$C(0,2,0)$,$D\left(0,0,\dfrac{4}{3}\right)$,$A_1(2,0,2)$,$E\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},0\right)$.

$\therefore\overrightarrow{B_1E}=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},-2\right)$,$\overrightarrow{BE}=\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},0\right)$,$\overrightarrow{CD}=\left(0,-2,\dfrac{4}{3}\right)$,$\overrightarrow{A_1C}=(-2,2,-2)$. ……………… (7 分)

设平面 A_1CD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{A_1C}\cdot m=0,\\ \overrightarrow{CD}\cdot m=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-2x_1+2y_1-2z_1=0,\\ -2y_1+\dfrac{4}{3}z_1=0,\end{cases}$令 $z_1=3$,得 $m=(-1,2,3)$. …………(8 分)

设平面 B_1BE 的法向量为 $n=(x_2,y_2,z_2)$,

则$\begin{cases}\overrightarrow{B_1E}\cdot n=0,\\ \overrightarrow{BE}\cdot n=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\dfrac{4}{3}x_2+\dfrac{2}{3}y_2-2z_2=0,\\ \dfrac{4}{3}x_2+\dfrac{2}{3}y_2=0,\end{cases}$令 $x_2=1$,得 $n=(1,-2,0)$. …………(10 分)

设平面 B_1BE 与平面 A_1CD 所成锐二面角为 θ,则 $\cos\theta=|\cos\langle n,m\rangle|=\dfrac{|n\cdot m|}{|n||m|}=\dfrac{5}{\sqrt{5}\times\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{70}}{14}$,

$\therefore$ 平面 B_1BE 与平面 A_1CD 所成锐二面角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{70}}{14}$. …………(12 分)

19. **命题意图** 本题考查概率的计算.

解析 (Ⅰ)该服装店前 3 年卖的品牌有 4 种情况:

"甲、甲、甲"的概率为$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$,利润为 $7+7.5+8=22.5$ 万元;

"甲、甲、乙"的概率为$\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$,利润为 $7+7.5+11=25.5$ 万元;

"甲、乙、甲"的概率为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$,利润为 $7+10.5+8=25.5$ 万元;

"甲、乙、乙"的概率为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$,利润为 $7+10.5+11=28.5$ 万元. …………(4 分)

所以前 3 年的利润之和超过 25 万元的概率为$\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{9}$. …………(6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知该服装店第三年卖甲品牌的概率为$\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{19}{36}$,卖乙品牌的概率为$\dfrac{2}{9}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{17}{36}$,所以第四年卖甲品牌的概率为$\dfrac{19}{36}\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{17}{36}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{203}{432}$. …………(8 分)

从而第四年卖乙品牌的概率为 $1-\dfrac{203}{432}=\dfrac{229}{432}$. …………(9 分)

又第四年卖甲品牌的利润为 8.5 万元,卖乙品牌的利润为 11.5 万元, …………(10 分)

因此第四年的利润的数学期望为 $8.5\times\dfrac{203}{432}+11.5\times\dfrac{229}{432}=\dfrac{1\,453}{144}$. …………(12 分)

20. **命题意图** 本题考查椭圆的方程及直线与椭圆的位置关系.

解析 (Ⅰ)根据题意,$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, …………(1 分)

又$\dfrac{1}{2}\cdot 2b\cdot 2c=2$, …………(2 分)

解得 $a=\sqrt{2},b=1$, …………(3 分)

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. …………(4 分)

(Ⅱ)存在点 $P\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$或 $P\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$满足条件,理由如下:

由题意,$\sqrt{|MP|^2+|NP|^2}=\sqrt{3}|MP|\cdot|NP|\Leftrightarrow\dfrac{1}{|MP|^2}+\dfrac{1}{|NP|^2}=3$.

设点 P 的坐标为 $(m,0)(-\sqrt{2}\leqslant m\leqslant\sqrt{2})$.

当直线 MN 的斜率为零时，点 M,N 为椭圆长轴的端点，

则 $\dfrac{1}{|MP|^2}+\dfrac{1}{|NP|^2}=\dfrac{1}{(\sqrt{2}-m)^2}+\dfrac{1}{(\sqrt{2}+m)^2}=\dfrac{(\sqrt{2}+m)^2+(\sqrt{2}-m)^2}{(2-m^2)^2}=3$,

解得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 或 $m=\pm2$（舍去）. ……………………（6 分）

当直线 MN 的斜率不为 0 时，设直线 MN 的方程为 $x=ty+m$，设点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=ty+m,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x 得 $(t^2+2)y^2+2tmy+m^2-2=0$,

由根与系数的关系得 $y_1+y_2=-\dfrac{2mt}{t^2+2},y_1y_2=\dfrac{m^2-2}{t^2+2}$, ……………………（7 分）

因此，$\dfrac{1}{|MP|^2}+\dfrac{1}{|NP|^2}=\dfrac{1}{(1+t^2)y_1^2}+\dfrac{1}{(1+t^2)y_2^2}=\dfrac{y_1^2+y_2^2}{(1+t^2)y_1^2y_2^2}=\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{(1+t^2)y_1^2y_2^2}=\dfrac{\dfrac{4m^2t^2}{(t^2+2)^2}-2\cdot\dfrac{m^2-2}{t^2+2}}{(1+t^2)\cdot\dfrac{(m^2-2)^2}{(t^2+2)^2}}=3$,

……………………（9 分）

整理可得 $(-3m^4+14m^2-8)t^2+(-3m^4+8m^2-4)=0$, ……………………（10 分）

故 $\begin{cases}-3m^4+14m^2-8=0,\\ -3m^4+8m^2-4=0,\end{cases}$ 解得 $m=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. ……………………（11 分）

故存在点 $P\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ 或 $P\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{3},0\right)$ 满足条件. ……………………（12 分）

21. **命题意图** 本题考查导数在函数问题中的应用.

解析 （Ⅰ）设 $g(x)=\lambda x^2+\ln \operatorname{ch} x=\lambda x^2-\ln 2+\ln(e^x+e^{-x})$.

$\because g(x)$ 为偶函数，$\therefore$ 只需 $x\geqslant0$ 时 $g(x)\leqslant0$.

$g(0)=0,g'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+2\lambda x,g'(0)=0$. ……………………（1 分）

令 $m(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}+2\lambda x$，则 $m'(x)=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}+2\lambda=\dfrac{4}{e^{2x}+e^{-2x}+2}+2\lambda\leqslant1+2\lambda$. ……………………（2 分）

①当 $\lambda\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，$m'(x)\leqslant0$，$\therefore\forall x\geqslant0,g'(x)$ 单调递减，$g'(x)\leqslant g'(0)=0,g(x)$ 单调递减，

$\therefore\forall x\geqslant0,g(x)\leqslant0$ 恒成立. ……………………（3 分）

②当 $\lambda\geqslant0$ 时，$m'(x)>0$，$\therefore\forall x\geqslant0,g'(x)$ 单调递增，$g'(x)\geqslant g'(0)=0,g(x)$ 单调递增，

$\therefore\forall x\geqslant0,g(x)\geqslant0$ 恒成立，不满足题意. ……………………（4 分）

③当 $-\dfrac{1}{2}<\lambda<0$ 时，若 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{-\sqrt{2\lambda+1}-1-\lambda}{\lambda}\right)$，则 $m'(x)>0,g'(x)$ 单调递增，$g'(x)>g'(0)=0$，

$g(x)$ 单调递增，$g(x)>g(0)=0$，不满足题意.

综上 $\lambda\leqslant-\dfrac{1}{2}$. ……………………（5 分）

（Ⅱ）（ⅰ）$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$. ……………………（7 分）

（ⅱ）由条件知 $(2\operatorname{ch} x)_{\min}<[a(-\operatorname{ch}^2x+4\operatorname{sh} x-1)]_{\max}$.

$\because(\operatorname{ch} x)'=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，$\therefore$ 当 $x\geqslant1$ 时 $(\operatorname{ch} x)'>0$,

$\therefore y=\mathrm{ch}\,x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore \mathrm{ch}\,x\geqslant \mathrm{ch}\,1$，即 $(2\mathrm{ch}\,x)_{\min}=2\mathrm{ch}\,1=\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}$. ………………………… (8 分)

令 $h(x)=a(-\mathrm{ch}^2x+4\mathrm{sh}\,x-1)$，则 $h(x)=a(-1-\mathrm{sh}^2x+4\mathrm{sh}\,x-1)=a[-(\mathrm{sh}\,x-2)^2+2]$.

$\because a>0,x\geqslant 1,y=\mathrm{sh}\,x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{2}\leqslant \mathrm{sh}\,x$，

$\therefore h(x)_{\max}=2a$. ………………………… (9 分)

$\therefore \mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}<2a$，即 $a>\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. ………………………… (10 分)

设 $t(a)=(\mathrm{e}-1)\ln a-a+1$，则 $t'(a)=\frac{\mathrm{e}-1}{a}-1=\frac{\mathrm{e}-1-a}{a},a>\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

当 $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<a<\mathrm{e}-1$ 时，$t'(a)>0$，$t(a)$ 单调递增，当 $a>\mathrm{e}-1$ 时，$t'(a)<0$，$t(a)$ 单调递减，

$\therefore t(a)$ 至多有两个零点，而 $t(1)=t(\mathrm{e})=0$，………………………… (11 分)

$\therefore$ 当 $a>\mathrm{e}$ 时，$t(a)<0$，$(\mathrm{e}-1)\ln a<a-1$；

当 $\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)<a<\mathrm{e}$ 时，$t(a)>0$，$(\mathrm{e}-1)\ln a>a-1$；

当 $a=\mathrm{e}$ 时，$t(a)=0$，$(\mathrm{e}-1)\ln a=a-1$. ………………………… (12 分)

22. **命题意图** 本题考查参数方程与普通方程的互化，极坐标方程与直角坐标方程的互化.

解析 （Ⅰ）直线 l_1 的参数方程消去参数 m，得普通方程为 $y=\frac{1}{k}(x+2)$. ………………………… (1 分)

利用 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta,\end{cases}$ 得 l_2 的直角坐标方程为 $y=k(x-2)$. ………………………… (2 分)

设 $P(x,y)$，由题设得 $\begin{cases}y=k(x-2),\\ y=\frac{1}{k}(x+2).\end{cases}$

消去 k 得 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$.

所以 C_2 的普通方程为 $x^2-y^2=4(y\neq 0)$. ………………………… (4 分)

故 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2\cos 2\theta=4(\rho\sin\theta\neq 0)$. ………………………… (5 分)

（Ⅱ）将 $C_1:\begin{cases}x=4\cos^2\alpha,\\ y=4\sin\alpha\cos\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）消去参数，可得 $(x-2)^2+y^2=4$，………………………… (6 分)

化为极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta$. ………………………… (7 分)

令 $\theta=\frac{\pi}{6}$，则 $|OA|=4\cos\frac{\pi}{6}=2\sqrt{3}$，$|OB|=\sqrt{\frac{4}{\cos\frac{\pi}{3}}}=2\sqrt{2}$，………………………… (8 分)

所以 $|AB|=2\sqrt{3}-2\sqrt{2}=2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. ………………………… (10 分)

23. **命题意图** 本题考查绝对值不等式的解法及基本不等式的应用.

解析 （Ⅰ）$f(x)=|x-1|+2|x|=\begin{cases}-3x+1,x\leqslant 0,\\ x+1,0<x<1,\\ 3x-1,x\geqslant 1.\end{cases}$ ………………………… (1 分)

当 $x\leqslant 0$ 时，由 $f(x)\geqslant 2$，得 $-3x+1\geqslant 2$，解得 $x\leqslant -\frac{1}{3}$；………………………… (2 分)

当 $0<x<1$ 时，由 $f(x)\geqslant 2$，得 $x+1\geqslant 2$，无解；………………………… (3 分)

当 $x\geqslant 1$ 时，由 $f(x)\geqslant 2$，得 $3x-1\geqslant 2$，解得 $x\geqslant 1$. ………………………… (4 分)

所以 $f(x)\geqslant 2$ 的解集为 $\left\{x \middle| x\leqslant -\frac{1}{3}\text{或}x\geqslant 1\right\}$ ……………………（5 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$f(x)=2$ 时，$x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=1$，$f(x)$ 的图象与直线 $y=2$ 围成的图形为三角形，该三角形的面积为 $\frac{1}{2}\times 1\times\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{2}{3}$，所以 $a+b+c=\frac{2}{3}$. ……………………（6 分）

因为 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=\frac{3}{2}(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)$

$$=\frac{3}{2}\left(14+\frac{4a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{9a}{c}+\frac{c}{a}+\frac{9b}{c}+\frac{4c}{b}\right)$$

$$\geqslant\frac{3}{2}\left(14+2\sqrt{\frac{4a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+2\sqrt{\frac{9a}{c}\cdot\frac{c}{a}}+2\sqrt{\frac{9b}{c}\cdot\frac{4c}{b}}\right)=54,$$ ……………………（8 分）

所以 $bc+4ac+9ab\geqslant 54abc$. ……………………（10 分）