2022 学年第二学期期末调研测试卷

高二数学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1.答卷前，考生务必用黑色字迹钢笔或签字笔将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上.

2.作答选择题时，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上.不按以上要求作答的答案无效.

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in Z|x^2-x-2\le 0\}$，$B=\{x|x<1\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $[-2,1)$　　D. $[-1,1)$

【答案】B

【解析】

【分析】先解不等式化简集合 A，再由交集运算求解即可.

【详解】由 $x^2-x-2\le 0\Rightarrow (x-2)(x+1)\le 0\Rightarrow x\in[-1,2]$，故 $A=\{-1,0,1,2\}$，

$\therefore A\cap B=\{-1,0\}$，

故选：B.

2. 已知复数 z 满足 $(1-i)(i-z)=3+i$（i 是虚数单位），则复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=$（　　）

A. $-1-2i$　　B. $-1+2i$　　C. $-1-i$　　D. $-1+i$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数的除法得到复数 z，再根据共轭复数即可求得结果.

【详解】$\because (1-i)(i-z)=3+i$，$\therefore z=i-\dfrac{3+i}{1-i}=i-\dfrac{(3+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1-i$，

$\therefore$ 复数 z 的共轭复数为 $\bar{z}=-1+i$.

故选：D.

3. 设 $a=\log_2 6$，$b=\log_5 15$，$c=\log_7 21$，则（　　）

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

【答案】A

【解析】

【分析】根据对数的运算性质化简可得 a,b,c，结合对数函数的单调性即可求解.

【详解】由对数的运算性质，可得：

$$a=\log_2 6=\log_2(2\times 3)=1+\log_2 3=1+\frac{1}{\log_3 2},$$

$$b=\log_5 15=\log_5(5\times 3)=1+\log_5 3=1+\frac{1}{\log_3 5},$$

$$c=\log_7 21=\log_7(7\times 3)=1+\log_7 3=1+\frac{1}{\log_3 7},$$

因为 $0<\log_3 2<\log_3 5<\log_3 7$，则 $\frac{1}{\log_3 2}>\frac{1}{\log_3 5}>\frac{1}{\log_3 7}$，

所以 $a>b>c$.

故选：A.

4. 国家于 2021 年 8 月 20 日表决通过了关于修改人口与计划生育法的决定，修改后的人口计生法规定，国家提倡适龄婚育、优生优育，一对夫妻可以生育三个子女，该政策被称为三孩政策.某个家庭积极响应该政策，一共生育了三个小孩，假定生男孩和生女孩是等可能的，记事件 A：该家庭既有男孩又有女孩；事件 B：该家庭最多有一个男孩；事件 C：该家庭最多有一个女孩.则下列说法正确的是（　　）

A. 事件 B 与事件 C 互斥但不对立　　B. 事件 A 与事件 B 互斥且对立

C. 事件 B 与事件 C 相互独立　　D. 事件 A 与事件 B 相互独立

【答案】D

【解析】

【分析】利用互斥事件、对立事件的意义可判断选项 A，B；利用独立事件的定义可判断 C,D

【详解】有三个小孩的家庭的样本空间可记为：

Ω={(男，男，男)，(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)，(男，女，女)，(女，男，女)，(女，女，男)，(女，女，女)}，

事件 A={(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)，(男，女，女)，(女，男，女)，(女，女，男)}

事件 B={(男，女，女)，(女，男，女)，(女，女，男)，(女，女，女)}，

事件C={(男，男，男)，(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)}，

对于A，$B\cap C=\varnothing$,且$B\cup C=\Omega$，所以事件B与事件C互斥且对立，故A不正确；

对于B，$A\bigcap B=$ {(男，女，女)，(女，男，女)，(女，女，男)}，所以事件A与事件B不互斥，故B不正确；

对于C，事件B有4个样本点，事件C有4个样本点，事件BC有0个样本点，

$P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},P(C)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},P(BC)=0$，显然有$P(B)\cdot P(C)\neq P(BC)$，即事件$B$与事件$C$不相互独立，故C不正确；

对于D，事件A有6个样本点，事件B有4个样本点，事件AB有3个样本点，

$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4},P(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},P(AB)=\frac{3}{8}$，显然有$P(A)\cdot P(B)=P(AB)$，即事件A与事件$B$相互独立，故D正确；

故选：D

5. 已知函数$f\left(x\right)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)\left(\omega>0\right)$对任意$x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$都有$f\left(x\right)>\frac{1}{2}$，则当$\omega$取到最大值时，函数$f\left(x\right)$图象的一条对称轴是（　　）

A. $x=\frac{9\pi}{28}$　　B. $x=\frac{27\pi}{28}$　　C. $x=\frac{9\pi}{20}$　　D. $x=\frac{27\pi}{20}$

【答案】A

【解析】

【分析】先根据$x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，得到$\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{4}$，结合$f(x)>\frac{1}{2}$，得到$\frac{3\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{4}$的范围，求出$\omega$的范围，进而得到$\omega$的最大值，再利用整体法求出函数的对称轴，得到答案.

【详解】$\because x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$，$\omega>0$，$\therefore\frac{\pi}{4}<\omega x+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{4}$，

$\because f(x)>\frac{1}{2}$，$\therefore\frac{3\pi\omega}{4}+\frac{\pi}{4}\leq\frac{5\pi}{6}$，

$\therefore 0<\omega\leq\frac{7}{9}$，所以$\omega$的最大值为$\frac{7}{9}$，

当$\omega=\frac{7}{9}$时$f(x)=\sin\left(\frac{7}{9}x+\frac{\pi}{4}\right)$，令$\frac{7}{9}x+\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in Z$，

解得$x=\frac{9\pi}{28}+\frac{9}{7}k\pi,k\in Z$，

当$k=0$时，对称轴为$x=\frac{9\pi}{28}$，故A正确；

若$\frac{9\pi}{28}+\frac{9}{7}k\pi=\frac{27\pi}{28}$，则$k=\frac{1}{2}\notin Z$，故B错误；

若$\frac{9\pi}{28}+\frac{9}{7}k\pi=\frac{9\pi}{20}$，则$k=\frac{1}{10}\notin Z$，故C错误；

若$\frac{9\pi}{28}+\frac{9}{7}k\pi=\frac{27\pi}{20}$，则$k=\frac{4}{5}\notin Z$，故D错误；

故选：A.

6. 已知单位向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{7}$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量是（　　）

A. $\frac{1}{2}\vec{a}$　　B. $-\frac{1}{2}\vec{a}$　　C. $\frac{1}{2}\vec{b}$　　D. $-\frac{1}{2}\vec{b}$

【答案】D

【解析】

【分析】先将$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|=\sqrt{7}$两边平方得到向量的数量积，再根据$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量公式得出结果.

【详解】由已知得$\left|\vec{a}-2\vec{b}\right|^2=\vec{a}^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=7$，

因为$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，所以$1-4\vec{a}\cdot\vec{b}+4=7$，即$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{1}{2}$.

所以$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影向量为$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=-\frac{1}{2}\vec{b}$.

故选：D.

7. 7个人站成一排准备照一张合影，其中甲、乙要求相邻，丙、丁要求分开，则不同的排法有（　　）

A. 400种　　B. 720种　　C. 960种　　D. 1200种

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意，结合捆绑法分别计算甲、乙要求相邻的排法和甲、乙要求相邻且丙、丁也相邻的排法，再相减即可求解.

【详解】根据题意，可知甲、乙要求相邻的排法有$A_6^6\times2=1440$种，

而甲、乙要求相邻且丙、丁也相邻的排法有$A_5^5\times2\times2=480$种，

故甲、乙要求相邻，丙、丁分开的排法有$1440-480=960$种.

故选：C.

8. 已知函数$f\left(x\right)$的定义域为$\mathbf{R}$，若$f\left(2x+1\right)$为偶函数，$f\left(x+2\right)$为奇函数，则（　　）

A. $f\left(-1\right)=0$　　B. $f\left(1\right)=0$　　C. $f\left(2022\right)=0$　　D. $f\left(2023\right)=0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据奇偶性可求得函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，再利用赋值法求函数值，即可判断.

【详解】函数 $f(x+2)$ 为奇函数，则 $f(x+2)=-f(-x+2)$，可得 $f(x)=-f(-x+4)$

函数 $f(2x+1)$ 为偶函数，则 $f(2x+1)=f(-2x+1)$，可得 $f(x+1)=f(-x+1)$，

所以 $f(x)=f(-x+2)$，即 $-f(-x+4)=f(-x+2)$，即 $f(x+2)=-f(x)$，

即 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 是以 4 为周期的函数，

由 $f(x+2)=-f(-x+2)$，令 $x=0$，得 $f(2)=-f(2)$，知 $f(2)=0$，

则 $f(2022)=f(505\times4+2)=f(2)=0$，故 C 正确；

其它选项，根据题目中的条件无法确定函数值的结果，故 ABD 不一定成立.

故选：C.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 2023 年 6 月 18 日，很多商场都在搞“618”促销活动.市物价局派人对 5 个商场某商品同一天的销售量及其价格进行调查，得到该商品的售价 x 元和销售量 y 件之间的一组数据（如表所示），用最小二乘法求得 y 关于 x 的经验回归直线是 $\hat{y}=-0.32x+\hat{a}$，相关系数 $r=-0.9923$，则下列说法正确的有（　　）

x	90	95	100	105	110
y	11	10	8	6	5

A. 变量 x 与 y 负相关且相关性较强

B. $\hat{a}=40$

C. 当 $x=75$ 时，y 的估计值为 14.5

D. 相应于点 $(95,10)$ 的残差为 0.4

【答案】ABD

【解析】

【分析】根据相关性、相关系数判断 A，利用样本中心点判断 B，将 $x=75$ 代入回归直线方程判断 C，求得 $x=95$ 时 y 的估计值，进而求得对应的残差，从而判断 D.

【详解】对 A，由回归直线可得变量 x，y 线性负相关，且由相关系数 $|r|=0.9923$ 可知相关性强，故 A 正

确；

对 B，由题可得 $\overline{x}=\frac{1}{5}(90+95+100+105+110)=100$，$\overline{y}=\frac{1}{5}(11+10+8+6+5)=8$，

故回归直线恒过点 $(100,8)$，故 $8=-0.32\times100+\hat{a}$，即 $\hat{a}=40$，故 B 正确；

对 C，当 $x=75$ 时，$\hat{y}=-0.32\times75+40=16$，故 C 错误；

对 D，相应于点 $(95,10)$ 的残差 $\hat{e}=10-(-0.32\times95+40)=0.4$，故 D 正确.

故选：ABD.

10. 已知函数 $f(x)$ 的图象是由函数 $y=2\sin x\cos x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到，则（　　）

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

D. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称

【答案】AD

【解析】

【分析】用二倍角公式化简 $y=2\sin x\cos x$，向右平移后得 $f(x)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，分别代入正弦函数的单调区间，对称轴，对称中心分别对四个选项判断即可.

【详解】因为 $y=2\sin x\cos x=\sin 2x$，向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得 $f(x)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 选项正确；

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，解得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi$，所以单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$，故 B 选项错误；

令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,$ 解得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，故 C 选项错误；

令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi,$ 解得 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$ 所以函数 $f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,0\right),k\in Z$，故 D 选项正确.

故选：AD

11. 已知$a>0$，$b>0$，且$a^2+b=1$，则（　　）

A. $a^2-b\le -1$

B. $\frac{1}{2}<2^{a-\sqrt{b}}<2$

C. $a+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$

D. $\log_2 a+\log_2\sqrt{b}>-1$

【答案】BC

【解析】

【分析】用特值法判断A；推出$a-\sqrt{b}$范围，结合指数函数的单调性判断B；利用基本不等式判断C；利用对数的运算性质结合基本不等式判断D.

【详解】对于A，当$a^2=b=\frac{1}{2}$时，$a^2-b=0$，故A错误；

对于B，$a>0$，$b>0$，且$a^2+b=1$，则$0<a<1,0<\sqrt{b}<1$，

所以$-1<a-\sqrt{b}<1$，则$\frac{1}{2}<2^{a-\sqrt{b}}<2$，故B正确；

对于C，$\left(a+\sqrt{b}\right)^2=a^2+b+2a\sqrt{b}=1+2\sqrt{a^2b}\le 1+a^2+b=2$，仅当$a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=\frac{1}{2}$取等号，

又$a+\sqrt{b}>0$，则$a+\sqrt{b}\le\sqrt{2}$，故C正确；

对于D，$\log_2 a+\log_2\sqrt{b}=\log_2 a\sqrt{b}=\log_2\sqrt{a^2b}\le\log_2\frac{a^2+b}{2}=\log_2\frac{1}{2}=-1$，仅当$a=\frac{\sqrt{2}}{2},b=\frac{1}{2}$取等号，故D错误.

故选：BC.

12. 已知函数$f\left(x\right)=\left|e^x-1\right|$，$x_1<0$，$x_2>0$，函数$y=f\left(x\right)$的图象在点$A\left(x_1,f\left(x_1\right)\right)$处的切线与在点$B\left(x_2,f\left(x_2\right)\right)$处的切线互相垂直，且分别与$y$轴交于$M$、$N$两点，则（　　）

A. x_1+x_2为定值

B. x_1x_2为定值

C. 直线AB的斜率取值范围是$\left(0,+\infty\right)$

D. $\frac{|AM|}{|BN|}$的取值范围是$\left(0,1\right)$

【答案】ACD

【解析】

【分析】结合导数的几何意义可得$x_1+x_2=0$，即可判断AB；结合基本不等式可判断C；结合直线方程及

两点间距离公式可得$|AM|,|BN|$，化简可判断 D.

【详解】当$x<0$时，$f(x)=1-\mathrm{e}^{x}$，导数为$f'(x)=-\mathrm{e}^{x}$，

可得在点$A\left(x_1,1-\mathrm{e}^{x_1}\right)$处的斜率为$k_1=-\mathrm{e}^{x_1}$，

切线AM的方程为$y-\left(1-\mathrm{e}^{x_1}\right)=-\mathrm{e}^{x_1}\left(x-x_1\right)$，

令$x=0$，可得$y=1-\mathrm{e}^{x_1}+x_1\mathrm{e}^{x_1}$，即$M\left(0,1-\mathrm{e}^{x_1}+x_1\mathrm{e}^{x_1}\right)$，

当$x>0$时，$f(x)=\mathrm{e}^{x}-1$，导数为$f'(x)=\mathrm{e}^{x}$，

可得在点$B\left(x_2,\mathrm{e}^{x_2}-1\right)$处的斜率为$k_2=\mathrm{e}^{x_2}$，

令$x=0$，可得$y=\mathrm{e}^{x_2}-1-x_2\mathrm{e}^{x_2}$，即$N\left(0,\mathrm{e}^{x_2}-1-x_2\mathrm{e}^{x_2}\right)$，

由$f(x)$的图象在A，B处的切线相互垂直，可得$k_1k_2=-\mathrm{e}^{x_1}\cdot\mathrm{e}^{x_2}=-1$，

即为$x_1+x_2=0,x_1<0,x_2>0$，故 A 正确，B 错误；

直线AB的斜率$k_{AB}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}-1-\left(1-\mathrm{e}^{x_1}\right)}{x_2-x_1}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}+\mathrm{e}^{x_1}-2}{x_2-x_1}\geq\dfrac{2\sqrt{\mathrm{e}^{x_2}\mathrm{e}^{x_1}}-2}{x_2-x_1}=\dfrac{2\sqrt{\mathrm{e}^{x_2+x_1}}-2}{x_2-x_1}=0$，

因为$x_1\neq x_2$，所以上面不等式中的等号不成立 ，故 C 正确；

$|AM|=\sqrt{x_1^2+\left(x_1\mathrm{e}^{x_1}\right)^2}=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_1}}\left(-x_1\right),|BN|=\sqrt{x_2^2+\left(x_2\mathrm{e}^{x_2}\right)^2}=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_2}}\cdot x_2$，

$\dfrac{|AM|}{|BN|}=\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_1}}\left(-x_1\right)}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_2}}\cdot x_2}=\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x_1}}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2x_1}}}=\mathrm{e}^{x_1}\in(0,1)$，故 D 正确.

故答案为：ACD.

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知$\left(x-\dfrac{1}{x^3}\right)^n\left(n\in\mathbf{N}_+,3\leq n\leq16\right)$的展开式中含有常数项，则$n$的一个可能取值是______.

【答案】4、8、12、16（任选一个为答案）

【解析】

【分析】根据二项式定理展开上述式子，找到满足题意的关于n的取值规律，即可求出答案.

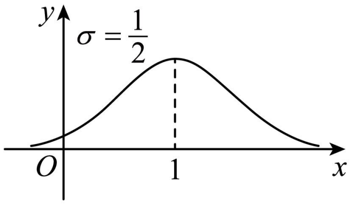
【详解】根据二项式定理展开可得$T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r x^{n-r}\left(-1\right)^r x^{-3r}=\left(-1\right)^r\mathrm{C}_n^r x^{n-4r}$，

因为展开式中含有常数项，所以$n-4r=0\Rightarrow n=4r$，

由此可得当n为 4 的倍数时，即可满足题意，又因$3\leq n\leq16$，故n可取 4、8、12、16.

故答案为：4、8、12、16（任选一个为答案）

14. 设随机变量ξ服从正态分布，ξ的分布密度曲线如图所示，若$P(\xi<0)=p$，则$P(0<\xi<1)=$______，$D(\xi)=$______.



【答案】 ①. $\frac{1}{2}-p$ ②. $\frac{1}{4}$##0.25

【解析】

【分析】由密度曲线可知$\mu=1$，$\sigma=\frac{1}{2}$，根据正态分布的性质计算可得.

【详解】由ξ的分布密度曲线关于$x=1$对称，可知$\mu=1$，$\sigma=\frac{1}{2}$，

又$P(\xi<0)=p$，所以$P(0<\xi<1)=\frac{1}{2}-P(\xi<0)=\frac{1}{2}-p$，$D(\xi)=\sigma^2=\frac{1}{4}$.

故答案为：$\frac{1}{2}-p$；$\frac{1}{4}$

15. 湖州地区甲、乙、丙三所学科基地学校的数学强基小组人数之比为$3:2:1$，三所学校共有数学强基学生48人，在一次统一考试中，所有学生的成绩平均分为117，方差为21.5. 已知甲、乙两所学校的数学强基小组学生的平均分分别为118和114，方差分别为15和21，则丙学校的学生成绩的方差是______.

【答案】12

【解析】

【分析】根据按比例分配分层随机抽样总样本平均数与方差的计算公式求解.

【详解】甲、乙、丙三所学科基地学校的数学强基小组人数之比为$3:2:1$，三所学校共有数学强基学生48人，

则甲校的数学强基小组人数24；乙校的数学强基小组人数为16；丙校的数学强基小组人数8，

把甲校的数学强基小组学生的平均分记为$\overline{x}=118$，方差记为$s_x^2=15$；

把乙校的数学强基小组学生的平均分记为$\overline{y}=114$，方差记为$s_y^2=21$；

把丙校的数学强基小组学生的平均分记为$\overline{z}$，方差记为s_z^2；

把所有学生的平均分记为$\overline{\omega}=117$，方差记为$s^2=21.5$.

根据按比例分配分层随机抽样总样本平均数与各层样本平均数的关系，

可得 $\overline{\omega}=\frac{24}{48}\overline{x}+\frac{16}{48}\overline{y}+\frac{8}{48}\overline{z}$，即 $117=\frac{24}{48}\times 118+\frac{16}{4}\times 114+\frac{8}{4}\overline{z}$，解得 $\overline{z}=120$，

因此，$s^2=\frac{1}{48}\left\{24\left[s_x^2+(\overline{x}-\overline{\omega})^2\right]+16\left[s_y^2+(\overline{y}-\overline{\omega})^2\right]+8\left[s_z^2+(\overline{z}-\overline{\omega})^2\right]\right\}$，

即 $21.5=\frac{1}{48}\left\{24\times\left[15+(118-117)^2\right]+16\times\left[21+(114-117)^2\right]+8\times\left[s_z^2+(120-117)^2\right]\right\}$，

解得 $s_z^2=12$.

故答案为：12.

16. 在四面体 $ABCD$ 中，$AB=CD=\sqrt{3}$，$BC=2\sqrt{3}$，且 $AB\perp BC$，$CD\perp BC$，异面直线 AB，CD 所成角为 $\frac{\pi}{3}$，则该四面体外接球的表面积是______.

【答案】16π 或 24π

【解析】

【分析】由题意将四面体补成一个直三棱柱，由此可求出外接球的半径，求得答案.

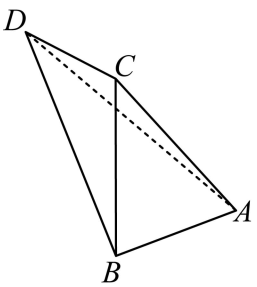
【详解】如图：过 B 作 $BE//CD$ 且 $BE=CD$，连接 DE, AE，过 A 作 $AF//DE$ 且 $AF=DE$，连接 CF, DF，

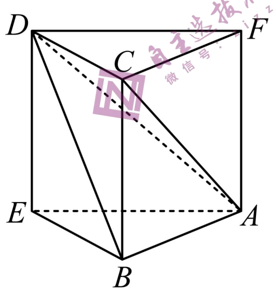
因为 $CD\perp BC$，所以 $BE\perp BC$，又 $AB\perp BC$，$AB\cap BE=B, AB, BE\subset$ 面 ABE ，

所以 $BC\perp$ 面 ABE，所以可以将四面体 $ABCD$ 补成一个如图所示的直三棱柱 $ABE-FCD$，

所以四面体 $ABCD$ 与直三棱柱 $ABE-FCD$ 有共同的外接球，

且球心位于底面 ABE 外心沿 BC 方向的 $\frac{BC}{2}$ 处，即 $R=\sqrt{r^2+(\frac{BC}{2})^2}$，（设四面体的外接球半径为 R，$\triangle ABE$ 的外接圆半径为 r，）.





因为异面直线 AB，CD 所成角为 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\angle ABE=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$，

当 $\angle ABE=\frac{\pi}{3}$ 时，$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}=2r, r=1$ ，

当 $\angle ABE=\frac{2\pi}{3}$ 时，$AE=3$ ，则 $\frac{3}{\sin 120^\circ}=2r, r=\sqrt{3}$，

则 $R=\sqrt{r^2+(\frac{BC}{2})^2}=\sqrt{r^2+3}$ ，

所以该四面体外接球的半径 $R=2$ 或 $\sqrt{6}$，

则外接球的表面积为. $4\pi R^2=16\pi$ 或 24π，

故答案为：16π 或 24π

【点睛】几何体外接球球心的求法：

（1）将几何体置入长方体或直棱柱中找球心；

（2）利用几何法找到几何体各个顶点距离相等的点即为球心；

（3）设球心 O 坐标，根据 O 到各顶点的距离相等解方程组得到球心 O 坐标.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 设袋子中装有大小相同的 6 个红球和 4 个白球，现从袋中任取 4 个小球（每球取出的机会均等）.

（1）求取出的 4 个小球中红球个数比白球个数多的概率；

（2）若取出一个红球记 2 分，取出一个白球记 1 分，记 X 表示取出的 4 个球的总得分，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

【答案】（1）$\dfrac{19}{42}$

（2）分布列见解析，数学期望 $\dfrac{32}{5}$

【解析】

【分析】（1）取出的 4 个小球中红球个数比白球个数多的事件分为：3 个红球 1 白球、4 个红球，结合古典概型公式求解；

（2）由题意 X 所有可能的取值为：$X=4,5,6,7,8$，求出对应概率，得随机变量 X 的分布列，利用数学期望公式计算期望.

【小问 1 详解】

取出的 4 个小球中红球个数比白球个数多的事件分为：3 个红球 1 白球、4 个红球，

则 $P=\dfrac{C_6^3C_4^1+C_6^4C_4^0}{C_{10}^4}=\dfrac{19}{42}$.

【小问 2 详解】

由题意 X 所有可能的取值为：$X=4,5,6,7,8$，

$$P(X=4)=\frac{C_6^0C_4^4}{C_{10}^4}=\frac{1}{210},P(X=5)=\frac{C_6^1C_4^3}{C_{10}^4}=\frac{4}{35},P(X=6)=\frac{C_6^2C_4^2}{C_{10}^4}=\frac{3}{7},$$

$$P(X=7)=\frac{C_6^3C_4^1}{C_{10}^4}=\frac{8}{21},P(X=8)=\frac{C_6^4C_4^0}{C_{10}^4}=\frac{1}{14},$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	4	5	6	7	8
P	$\frac{1}{210}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{8}{21}$	$\frac{1}{14}$

随机变量 X 的数学期望为 $E(X)=4\times\frac{1}{210}+5\times\frac{4}{35}+6\times\frac{3}{7}+7\times\frac{8}{21}+8\times\frac{1}{14}=\frac{32}{5}$.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=\log_a\frac{2-x}{2+x}$（$a>0$ 且 $a\neq1$）.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的奇偶性；

（2）若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=\log_a\left(x-m\right)$ 有实数解，求实数 m 的取值范围.

【答案】（1）奇函数　　（2）$\left(-\infty,2\right)$

【解析】

【分析】（1）求出函数 $f\left(x\right)$ 的定义域，利用函数奇偶性的定义可得出结论；

（2）由 $f\left(x\right)=\log_a\left(x-m\right)$ 可得出 $m=x+1-\frac{4}{x+2}$，求出函数 $g\left(x\right)=x+1-\frac{4}{x+2}$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上的值域，可得出实数 m 的取值范围.

【小问 1 详解】

解：对于函数 $f\left(x\right)$，有 $\frac{2-x}{2+x}>0$，则 $\frac{x-2}{x+2}<0$，解得 $-2<x<2$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(-2,2\right)$，

$f\left(-x\right)=\log_a\frac{2+x}{2-x}=-\log_a\frac{2-x}{2+x}=-f\left(x\right)$，故函数 $f\left(x\right)$ 为奇函数.

【小问 2 详解】

解：由 $f\left(x\right)=\log_a\left(x-m\right)$ 可得 $x-m=\frac{2-x}{2+x}$，

则 $m=x+\frac{x-2}{x+2}=x+\frac{x+2-4}{x+2}=x+1-\frac{4}{x+2}$，

令 $g\left(x\right)=x+1-\frac{4}{x+2}$，其中 $-2<x<2$，

因为函数 $y=x+1$、$y=-\frac{4}{x+2}$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上为增函数，故函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(-2,2\right)$ 上为增函数，

当 $-2<x<2$ 时，$g\left(x\right)=x+1-\frac{4}{x+2}\in\left(-\infty,2\right)$，

因此，实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty,2\right)$.

19. 第 19 届亚运会将于 2023 年 9 月 23 日在杭州开幕，本次亚运会共设 40 个大项，61 个分项，482 个小项. 为

调查学生对亚运会项目的了解情况，某大学进行了一次抽样调查，若被调查的男女生人数均为$10n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，统计得到以下$2\times2$列联表，经过计算可得$K^2\approx4.040$.

	男生	女生	合计
了解	$6n$		
不了解		$5n$	
合计	$10n$	$10n$	

（1）求n的值，并判断有多大的把握认为该校学生对亚运会项目的了解情况与性别有关；

（2）①为弄清学生不了解亚运会项目的原因，采用分层抽样的方法从抽取的不了解亚运会项目的学生中随机抽取 9 人，再从这 9 人中抽取 3 人进行面对面交流，“至少抽到一名女生”的概率；

②将频率视为概率，用样本估计总体，从该校全体学生中随机抽取 10 人，记其中对亚运会项目了解的人数为X，求随机变量X的数学期望.

附表：

$P\left(K^2\geq k_0\right)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	10.828

附：$K^2=\dfrac{n\left(ad-bc\right)^2}{\left(a+b\right)\left(c+d\right)\left(a+c\right)\left(b+d\right)}$.

【答案】（1）$n=20$，有95%的把握认为该校学生对亚运会项目的了解情况与性别有关

（2）①$\dfrac{20}{21}$；②$E(X)=\dfrac{11}{2}$

【解析】

【分析】（1）完善2×2列联表，根据K^2的计算可得出关于n的等式，即可解得正整数n的值，结合临界值表可得出结论；

（2）①分析可知，抽取的这 9 人中男生的人数为 4，女生的人数为 5，利用组合数结合古典概型和对立事件的概率公式可求得所求事件的概率；

②分析可知$X\sim B\left(10,\dfrac{11}{20}\right)$，利用二项分布的期望公式可求得$E\left(X\right)$的值.

【小问 1 详解】

被调查的男女生人数均为$10n\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$，其中男生中了解的有$6n$，则不了解的有$4n$，

其中女生中不了解的有$5n$，则了解的有$5n$，

2×2列联表如下表所示：

	男生	女生	合计
了解	$6n$	$5n$	$11n$
不了解	$4n$	$5n$	$9n$
合计	$10n$	$10n$	$20n$

$K^2=\dfrac{20n\times(6n\times5n-4n\times5n)^2}{10n\times10n\times11n\times9n}=\dfrac{20n}{99}\approx4.040$，又$n\in\mathrm{N}^*$，可得$n=20$，

因为$P\left(K^2\geq3.841\right)=0.05$，

所以有95%的把握认为该校学生对亚运会项目的了解情况与性别有关；

【小问 2 详解】

①采用分层抽样的方法从抽取的不了解亚运会项目的学生中随机抽取 9 人，

所以这 9 人中男生的人数为 4，女生的人数为 5，

再从这 9 人中抽取 3 人进行面对面交流，

“至少抽到一名女生”的概率为$P=1-\dfrac{\mathrm{C}_4^3}{\mathrm{C}_9^3}=\dfrac{20}{21}$；

②由题意可知$X\sim B\left(10,\dfrac{11}{20}\right)$，故$E(X)=10\times\dfrac{11}{20}=\dfrac{11}{2}$.

20. 记$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知$b+c=2a\sin\left(C+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

（1）求A；

（2）设AB的中点为D，若$CD=a$，且$b-c=1$，求$\triangle ABC$的的面积.

【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{3}$

（2）$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

【解析】

【分析】(1) 由 $b+c=2a\sin\left(C+\frac{\pi}{6}\right)$ 可得 $b+c=\sqrt{3}a\sin C+a\cos C$，由正弦定理及辅助公式得 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,即可求得答案;

(2) 在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得，$a^2=b^2+\frac{c^2}{4}-\frac{bc}{2}$；在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-bc$，从而得 $b=\frac{3c}{2}$，再由 $b-c=1$，可得 $b=3$，$c=2$，由三角形面积公式求解即可.

【小问 1 详解】

解：由已知得，$b+c=\sqrt{3}a\sin C+a\cos C$，

由正弦定理可得，$\sin B+\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C+\sin A\cos C$，

因为 $A+B+C=\pi$，

所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，

代入上式，整理得 $\cos A\sin C+\sin C=\sqrt{3}\sin A\sin C$，

又因为 $C\in(0,\pi)$，$\sin C\neq 0$，

所以 $\sqrt{3}\sin A-\cos A=1$，

即 $\sin\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$,

又因为 $A\in(0,\pi)$，

所以 $-\frac{\pi}{6}<A-\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$，

所以 $A-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，

解得 $A=\frac{\pi}{3}$；

【小问 2 详解】

在 $\triangle ACD$ 中，由余弦定理得，$CD^2=b^2+\frac{c^2}{4}-2b\cdot\frac{c}{2}\cos A$.

而 $A=\frac{\pi}{3}$，$CD=a$，所以 $a^2=b^2+\frac{c^2}{4}-\frac{bc}{2}$，①

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-bc$，②

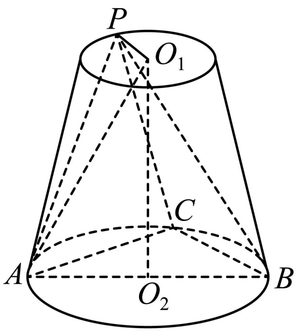
由①②两式消去 a，得 $3c^2=2bc$，

所以$b=\frac{3c}{2}$，

又$b-c=1$，解得$b=3$，$c=2$．

所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{2}$．

21. 如图，圆台O_1O_2的上底面的半径为1，下底面的半径为$\sqrt{2}$，AB是圆台下底面的一条直径，PO_1是圆台上底面的一条半径，C为圆O_2上一点，点P，C在平面AO_1O_2的同侧，且$AC=BC$，$PO_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} BC$．



（1）证明：$PO_1\perp$平面PAC；

（2）若三棱锥$P-ABC$的体积为$\frac{4}{3}$，求平面PO_1A与平面PBC所成角的正弦值.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{4}{5}$

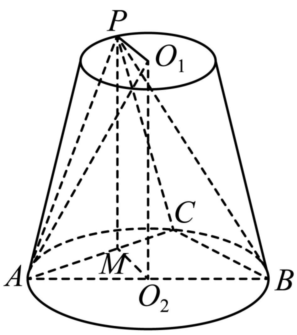
【解析】

【分析】（1）取AC的中点M，先证明$O_2M\perp$平面PAC，再利用$O_2M//PO_1$即可得到证明；

（2）建立空间直角坐标系，由体积得到圆台的高，再求出两个平面的法向量，利用坐标法计算即可.

【小问1详解】

证明：如图取AC中点M，连接O_2M，PM



由题意，$BC=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=2$，$O_1P=1$，

又 O_2M 为 $\triangle ABC$ 的中位线，故 $O_2M \parallel BC$，

又 AB 为直径，所以 $BC \perp AC$，则 $O_2M \perp AC$.

由 $PO_1 /\!/ BC$ 和 $O_2M \parallel BC$，得 $O_2M \parallel PO_1$，又 $O_2M = PO_1 = 1$，

所以四边形 PMO_2O_1 是平行四边形，故 $PM \parallel O_2O_1$，

又 $O_2O_1 \perp$ 平面 ABC，故 $O_2M \perp O_1O_2$，所以 $O_2M \perp PM$，又 $O_2M \perp AC$，

又 $AC \cap PM = M$，所以 $O_2M \perp$ 平面 PAC，

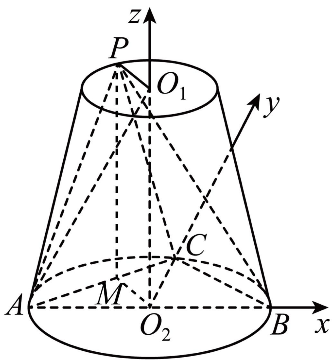
由 $O_2M \parallel PO_1$，得 $PO_1 \perp$ 平面 PAC.

【小问 2 详解】

由三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 $\frac{4}{3}$ 得 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 2\times OO_1 = \frac{4}{3}$，$\therefore O_1O_2 = 2$，

以 O_2 为原点，O_2B，O_2C，O_1O_2 所在直线分别为 x,y,z 轴，

建立如图所示空间直角坐标系，



则 $A\left(-\sqrt{2},0,0\right)$，$B\left(\sqrt{2},0,0\right)$，$C\left(0,\sqrt{2},0\right)$，$P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$，$O_1\left(0,0,2\right)$.

得 $\overrightarrow{AO_1} = \left(\sqrt{2},0,2\right)$，$\overrightarrow{PO_1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{CP} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$，$\overrightarrow{BP} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},2\right)$.

设平面 PO_1A 的法向量 $\vec{m} = \left(x,y,z\right)$，

由 $\begin{cases} \vec{m}\cdot\overrightarrow{AO_1} = \sqrt{2}x + 2z = 0 \\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PO_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 0 \end{cases}$，令 $x = \sqrt{2}$ 得：$z = -1$，$y = \sqrt{2}$.

得 $\vec{m}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},-1\right)$，

设平面 PBC 的法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{CP}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}b+2c=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}b+2c=0\end{cases}$ 令 $a=\sqrt{2}$ 得：$b=\sqrt{2}$，$c=1$.

得 $\vec{n}=\left(\sqrt{2},\sqrt{2},1\right)$，

则 $\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\dfrac{3}{5}$.

所以平面 PO_1A 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{4}{5}$.

22. 已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-ax$，$g\left(x\right)=\ln x-ax$，$a\in\mathrm{R}$.

（1）当 $a=1$ 时，求函数 $y=f\left(g\left(x\right)\right)$ 的单调区间；

（2）设函数 $h\left(x\right)=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ 的最小值为 m，求函数 $F\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{m}\ln x$ 的最小值.

（其中 $\mathrm{e}\approx2.71828$ 是自然对数的底数）

【答案】（1）在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增

（2）0

【解析】

【分析】（1）当 $a=1$ 时，$y=f(g(x))=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+x-\ln x$，求导，利用导数与单调性的关系求解；

（2）由题意得，$h(x)=\mathrm{e}^{x}-\ln x$，可求得 $h'(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}$，$h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，且 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，

结合条件得 $m=\dfrac{1}{x_0}+x_0>2$，然后利用导数研究函数 $F(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{m}\ln x$ 的性质求得 $F(x)$ 的最小值.

【小问 1 详解】

当 $a=1$ 时，$f(x)=\mathrm{e}^{x}-x,g(x)=\ln x-x$，

由题意得 $y=f(g(x))=\mathrm{e}^{\ln x-x}-(\ln x-x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^{x}}+x-\ln x$，

所以 $y'=\dfrac{(1-x)}{\mathrm{e}^{x}}+\left(1-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{(x-1)\left(\mathrm{e}^{x}-x\right)}{x\mathrm{e}^{x}}$，

令 $p(x)=\mathrm{e}^{x}-x$，则 $p'(x)=\mathrm{e}^{x}-1$，

当 $x<0$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增，

故 $p(x)\geq p(0)=1>0$，则 $\mathrm{e}^{x}>x$.

故当 $0<x<1$ 时，$y'<0$，当 $x>1$ 时，$y'>0$，

因此所求函数在 $(0,1)$ 单调递减，在 $(1,+\infty)$ 单调递增.

【小问 2 详解】

由题意得，$h(x)=\mathrm{e}^{x}-\ln x$，则 $h'(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}$，

令 $\varphi(x)=h'(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{x}$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^{x}+\dfrac{1}{x^{2}}>0$，

所以 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

又 $h'(1)=\mathrm{e}-1>0,h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}}-2<0$，

所以 $h'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_0，且 $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，

$h'\left(x_0\right)=\mathrm{e}^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=0$，即 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$.

当 $x\in\left(0,x_0\right)$ 时，$h'(x)<0$，当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,x_0\right)$ 单调递减，在 $\left(x_0,+\infty\right)$ 单调递增，

因此 $h(x)_{\min}=m=h\left(x_0\right)=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0$，

因为 $\mathrm{e}^{x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，所以 $x_0=-\ln x_0$，所以 $m=\dfrac{1}{x_0}+x_0>2$.

由 $F(x)=\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{m}\ln x$ 得 $F'(x)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{\mathrm{e}^{m}}{x}$，显然 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增.

因为 $m>2$，所以 $F'(1)=\mathrm{e}-\mathrm{e}^{m}<0,F'(m)=\mathrm{e}^{m}-\dfrac{\mathrm{e}^{m}}{m}=\mathrm{e}^{m}\left(1-\dfrac{1}{m}\right)>0$，

所以 $F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在唯一零点 x_1，且 $x_1\in(1,m),F'\left(x_1\right)=\mathrm{e}^{x_1}-\dfrac{\mathrm{e}^{m}}{x_1}=0$，

当 $x\in\left(0,x_1\right)$ 时，$F'(x)<0$，当 $x\in\left(x_1,+\infty\right)$ 时，$F'(x)>0$，

所以 $F(x)$ 在 $\left(0,x_1\right)$ 上为减函数，在 $\left(x_1,+\infty\right)$ 上为增函数，

所以 $F(x)$ 的最小值为 $F\left(x_1\right)=\mathrm{e}^{x_1}-\mathrm{e}^m\ln x_1$，

因为 $\mathrm{e}^{x_1}=\dfrac{\mathrm{e}^m}{x_1}$，所以 $x_1=m-\ln x_1$，所以 $m=x_1+\ln x_1$，

又 $m=\mathrm{e}^{x_0}-\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}+\ln\dfrac{1}{x_0}$，所以 $x_1+\ln x_1=\dfrac{1}{x_0}+\ln\dfrac{1}{x_0}$，

又函数 $y=x+\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，所以 $x_1=\dfrac{1}{x_0}$，

$$F\left(x_1\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}-\mathrm{e}^m\cdot\ln\frac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}+\ln\frac{1}{x_0}}\cdot\ln\frac{1}{x_0}=\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}-\frac{1}{x_0}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}\cdot\ln\frac{1}{x_0}$$

$$=\frac{1}{x_0}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}\cdot\left(x_0-\ln\frac{1}{x_0}\right)=\frac{1}{x_0}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x_0}}\cdot\left(x_0+\ln x_0\right),$$

因为 $x_0+\ln x_0=0$，所以 $F\left(x_1\right)=0$，即 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 0.

【点睛】方法点睛：含参数的函数的最值，一般先讨论函数的单调性，再根据单调性求出最值．含参数的函数在区间上的最值通常有两类：一是动极值点定区间，二是定极值点动区间，这两类问题一般根据区间与极值点的位置关系来分类讨论．