参考答案

1. D　2. C　3. A　4. B　5. B　6. C

7. C　8. A　9. BCD　10. BCD　11. ACD

12. BD　13. -2　14. 33

15. $\left[\sqrt{5},\dfrac{5\sqrt{13}}{4}\right)$　16. $\dfrac{2}{e}$

17.（1）$b_n=6n-6$；（2）$T_n=2^n+3n^2-3n+1$

（1）首先根据已知条件得到$a_n=2^{n-1}$，从而得到$\begin{cases}b_2=a_2+a_3=2+2^2=6\\ b_3=a_3+a_4=2^2+2^3=12\end{cases}$，再解方程组即可.

（2）首先根据（1）得到$c_n=2^{n-1}+6n-6$，再利用分组求和求解T_n即可.

（1）$S_5-S_4=a_5=16$，所以$\dfrac{a_5}{a_2}=q^3=8\Rightarrow q=2$，即$a_n=2\times2^{n-2}=2^{n-1}$.

所以$\begin{cases}b_2=a_2+a_3=2+2^2=6\\ b_3=a_3+a_4=2^2+2^3=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1+d=6\\ b_1+2d=12\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b_1=0\\ d=6\end{cases}$，

所以$b_n=6n-6$.

（2）$c_n=a_n+b_n=2^{n-1}+6n-6$，

$T_n=\left(2^0+0\right)+\left(2^1+6\right)+\left(2^2+12\right)+\cdots\left(2^{n-1}+6n-6\right)$

$=\left(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1}\right)+\left(0+6+\cdots+6n-6\right)$

$=\dfrac{1-2^n}{1-2}+\dfrac{(6n-6)n}{2}=2^n+3n^2-3n+1$.

18.（1）$T=\pi$；（2）$AC=\sqrt{6}$.

（1）化简可得$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$，可得$f(x)$的最小正周期；

（2）由$f(A)=1$，可得$\sin A=\cos A$，$A=\dfrac{\pi}{4}$，由正弦定理可得AC的长.

解：（1）由题意得$f(x)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)\cos x-\sin x\cos(\pi-x)$，

可得$f(x)=\cos^2x+\sin x\cos x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\dfrac{\sin 2x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+\dfrac{1}{2}$，

可得$T=\pi$；

（2）由题意：$f(A)=1$，可得$f(A)=\cos^2A+\sin A\cos A=1$，

$\therefore\sin A\cos A=1-\cos^2A=\sin^2A$，$\therefore\sin A=\cos A,\because A\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\therefore A=\dfrac{\pi}{4}$，

由正弦定理得 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin A}$ 即 $\frac{AC}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

可得 $AC=\sqrt{6}$.

19．9 档次的产品.

先探求 10 个档次的产品的每件利润关系式 $a_n=2n+6$，以及 10 个档次的产品相同时间内的产量关系式 $b_n=63-3n$，可得利润 $y=(2n+6)(63-3n)$，最后根据二次函数性质求最大值.

10 个档次的产品的每件利润构成等差数列：

8，10，12，…，$a_n=8+2(n-1)=2n+6\ (1\le n\le 10)$，

10 个档次的产品相同时间内的产量构成等差数列：

60，57，54，…，$b_n=60-3(n-1)=63-3n\quad(1\le n\le 10)$，

∴在相同时间内，生产第 n 个档次的产品获得的利润为

$y=(2n+6)(63-3n)=-6(n-9)^2+6\times 144$.

当 $\boldsymbol{n=9}$ 时，$y_{\max}=6\times 144=864$（元）

∴生产低 9 档次的产品可获得最大利润.

20．(1) $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3$

(2) $\left(\frac{k\pi}{2},3\right)(k\in\mathbf{Z})$

（1）根据函数的最小值及最小正周期，求出 $\omega=A=2$，再根据函数图象关于 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，结合 $0<\varphi<\pi$，求出 $\varphi=\frac{\pi}{3}$，从而求出函数解析式；

（2）先求出平移后的解析式，再用整体法求解对称中心.

（1）

依题意可得 $\begin{cases}3-A=1\\ \frac{2\pi}{\omega}=\pi\end{cases}$

解得 $\omega=A=2$，

则 $f(x)=2\cos(2x+\varphi)+3$，因为 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，所以 $2\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

又 $0<\varphi<\pi$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

故 $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3$.

（2）

依题意可得 $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{12}\right)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+3=-2\sin 2x+3$，

令 $2x=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，得 $x=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，

故曲线 $y=g(x)$ 的对称中心的坐标为 $\left(\frac{k\pi}{2},3\right)(k\in\mathbf{Z})$.

21.（1）证明见解析，$a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}3^{n-1}$；（2）证明见解析.

试题分析：本题第（1）问，证明等比数列，可利用等比数列的定义来证明，之后利用等比数列，求出其通项公式；对第（2）问，可先由第（1）问求出 $\frac{1}{a_n}$，然后转化为等比数列求和，放缩法证明不等式.

试题解析：（1）证明：由 $a_{n+1}=3a_n+1$ 得 $a_{n+1}+\frac{1}{2}=3(a_n+\frac{1}{2})$，所以 $\frac{a_{n+1}+\frac{1}{2}}{a_n+\frac{1}{2}}=3$，所以 $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，首项为 $a_1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，公比为 3，所以 $a_n+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}$，解得 $a_n=\frac{3^n-1}{2}$.

（2）由（1）知：$a_n=\frac{3^n-1}{2}$，所以 $\frac{1}{a_n}=\frac{2}{3^n-1}$，

因为当 $n\geq 1$ 时，$3^n-1\geq 2\cdot 3^{n-1}$，所以 $\frac{1}{3^n-1}\leq\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}$，于是 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}\leq 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}(1-\frac{1}{3^n})<\frac{3}{2}$，

所以 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\frac{1}{a_n}<\frac{3}{2}$.

22.（1）$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；（2）$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

（1）求得抛物线的顶点，求得 F_1，可得 c=1，再由向量共线的坐标表示，可得 b=1，进而得到 a，即有椭圆方程；

（2）运用向量共线的坐标表示，求得 PQ 的斜率，设出 PQ 的方程，联立椭圆方程，运用韦达定理和弦长公式，结合点到直线的距离公式，由三角形的面积公式，运用二次函数的最值求法，可得最大值.

（1）由抛物线 $C_2:y=-\frac{1}{2}(x^2-1)$，可得 $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$F_1(-1,0)$，

设椭圆的焦距为 $2c$，则有 $c=1$，

又由 $2\overline{OB}=\overline{OA}$ 可得 $A(0,1)$，

$\therefore b=1$，$a=\sqrt{2}$，

故椭圆 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）设点$N\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\right)$，

由$y=-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$得，$k_{PQ}=y'|_{x=t}=-t$.

$\therefore$直线PQ：$y=-tx+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}$，

联立$\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1\\ y=-tx+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}\end{cases}$消去$y$整理得，$\left(2t^2+1\right)x^2-2t\left(t^2+1\right)x+\frac{t^4+2t^2-3}{2}=0$，

由$\Delta>0$，得$t^2<3+2\sqrt{3}$，设$P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，

由根与系数关系可得，

$x_1+x_2=\frac{2t\left(t^2+1\right)}{2t^2+1}$，$x_1\bullet x_2=\frac{t^4+2t^2-3}{2\left(2t^2+1\right)}$，

$\therefore\left|x_1-x_2\right|=\frac{\sqrt{-2t^4+12t^2+6}}{2t^2+1}$，

$\therefore|PQ|=\sqrt{1+t^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+t^2}\ ?\frac{\sqrt{-2t^4+12t^2+6}}{2t^2+1}$.

设(x,y)，由$2\overrightarrow{F_1M}=\overrightarrow{F_1O}+\overrightarrow{F_1B}$得$\begin{cases}x=0,\\ y=\frac{1}{4},\end{cases}$故$M\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

而点$M\left(0,\frac{1}{4}\right)$到直线$PQ$的距离为：$d=\frac{\left|\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}\right|}{\sqrt{1+t^2}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{2t^2+1}{\sqrt{1+t^2}}$.

$\therefore S_{\Delta MPQ}=\frac{1}{2}|PQ|\bullet d=\frac{\sqrt{-2t^4+12t^2+6}}{8}=\frac{\sqrt{-2\left(t^2-3\right)^2+24}}{8}\le\frac{\sqrt{6}}{4}$，

$\because t^2<3+2\sqrt{3}$，故当$t^2=3$时，$\left(S_{\Delta MPQ}\right)_{\max}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。