绝密★启用前

2022—2023学年高三总复习阶段性检测考试

数学理科

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x|4-x^2<0\}$，集合 $B=\{0,1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{2,3,4\}$　　D. $\{3,4\}$

2. 如果复数 $z=\dfrac{4+bi}{i}(b\in\mathbf{R})$ 的实部与虚部相等，则复数 z 的共轭复数 $\bar{z}=$

A. $4+4i$　　B. $4-4i$　　C. $-4+4i$　　D. $-4-4i$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，向量 $\boldsymbol{b}=(1,3)$，若 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\parallel(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，则实数 λ 的值为

A. 2　　B. $-\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{7}{2}$　　D. $\dfrac{7}{2}$

4. 香农公式是通信界著名的公式，可以与勾股定理、欧拉公式及爱因斯坦的质能公式相媲美，其公式为 $C=W\log_2\left(1+\dfrac{S}{N}\right)$，其中 C 代表传输通道可传送的最大信息速率，W 代表传输通道的带宽，$\dfrac{S}{N}$ 代表接收信号的信噪比，根据该公式，若带宽 W 提高到原来的5倍，信噪比 $\dfrac{S}{N}$ 由1 000提高到2 000，C 提高到原来的 m 倍，则 m 的值最接近（参考数据：$\lg 2\approx 0.3$）

A. 10　　B. 5.5　　C. 5　　D. 4.5

5. 已知 $\alpha\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，且 $\cos 2\alpha+5\sin\alpha=-2$，则 $\tan\alpha$ 的值为

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

6. 下列命题是真命题的是

A. $f(x)=\sin x+\dfrac{1}{\sin x}$ 的最小值是2

B. $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ 是 $\ln a<\ln b$ 的充要条件

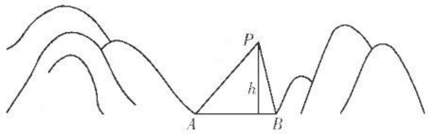
C. 在△ABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a\cos A=b\cos B$，则△ABC 为等腰三角形

D. $a=3$ 是直线 $l_1:(a-1)x+2y+1=0$ 与直线 $l_2:5x+(a+2)y-1=0$ 平行的充要条件

7. 若直线 $l:kx-y+k+4=0$ 与曲线 $C:x=2+\sqrt{4y-y^2}$ 有公共点，则实数 k 的取值范围是

A. $\left[-\dfrac{4}{3},0\right]$　　B. $\left[-\dfrac{3}{4},0\right]$　　C. $\left[-\dfrac{12}{5},0\right]$　　D. $\left[-\dfrac{5}{12},0\right]$

8. 为了在两座山之间的一条河流上修建一座桥，勘测部门使用无人机测量得到如下数据：无人机 P 的高度为 h，无人机观察 A,B 两点的俯角分别为 α,β. 则下列求 A,B 两点间距离的表达式中，错误的是



A. $h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)$　　B. $\dfrac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

C. $h\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}-\dfrac{2\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$　　D. $h\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}+\dfrac{2\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$

9. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M,N 分别为 AB,AD 的中点，则下列说法错误的是

A. 平面 $A_1MN\perp$ 平面 ACC_1　　B. 平面 $A_1BD\perp$ 平面 ACC_1

C. MC_1 与平面 ACC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{6}$　　D. BC_1 与平面 ACC_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

10. 已知双曲线 $C:x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$，P 为 C 上任意一点，过点 P 分别作 C 的两条渐近线的垂线，垂足分别为 M,N，则 $\dfrac{1}{|PM|}+\dfrac{1}{|PN|}$ 的最小值为

A. $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$　　B. $\dfrac{9}{8}$　　C. $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$　　D. $\dfrac{8}{9}$

11. 已知函数 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+1}$，函数 $h(x-1)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数. 若函数 $y=f(x)$ 的图象和函数 $y=h(x)+2$ 的图象有 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 个交点，这 n 个交点的坐标分别为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，记 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=P$，$\sum\limits_{i=1}^{n}y_i=Q$，则

A. n 是奇数　　B. $P=Q$　　C. $2P=Q$　　D. $P+Q=n$

12. 已知 $f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x$，其中 $\omega>0$，若函数满足以下条件：① $f(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{3\pi}{7},\dfrac{4\pi}{7}\right]$ 上是单调函数；② $f(x)\leqslant\left|f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right|$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立；③经过点 $(b,\sqrt{2}a)$ 的任意直线与函数 $y=f(x)$ 的图象恒有交点，则 ω 的取值范围是

A. $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{9}{2},\dfrac{15}{2}\right]$　　B. $\left(0,\dfrac{3}{2}\right]\cup\left[\dfrac{9}{2},7\right]$　　C. $\left[\dfrac{3}{2},3\right)\cup\left(\dfrac{9}{2},7\right]$　　D. $\left[\dfrac{3}{2},3\right]\cup\left[\dfrac{9}{2},7\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}8x-3y+3\geqslant0\\5x+2y-4\leqslant0\\x+y-1\geqslant0\end{cases}$，则 $z=y-3x$ 的最大值为______.

14. 古印度数学家婆什伽罗在《莉拉沃蒂》一书中提出如下问题：某人给一个人布施，初日施 2 子安贝（古印度货币单位），以后逐日倍增，问一月共施几何？其意是：某人每天坚持将一定的金钱施舍给一个人，第一天施舍 2 个子安贝金钱，以后每一天施舍的金钱数是前一天的 2 倍，问一个月下来这人共施舍了多少个子安贝金钱？在这个问题中，设此人前 $n(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $1\leqslant n\leqslant30)$ 天共施舍了 S_n 个子安贝，则使不等式 $S_n>2\,023$ 成立的 n 的最小值为______.

15. “没有全民健康，就没有全面小康”. 某社区为响应号召新建了一大型体育健身广场，现准备在广场地面上画一个蕴含数学气息的钝角三角形，且这个三角形的三边长(单位：m)构成公差为 20 的等差数列，则此三角形的最大边长 a(单位：m)的取值范围是______.

16. 已知函数 $f(x)=(x-a)[x^2-(b-1)x-b]$，函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点关于 y 轴对称，当 $a=b$ 时，函数 $f(x)=$______；当函数 $f(x)$ 有三个零点时，函数 $f(x)$ 的极大值为______.（第一空 2 分，第二空 3 分）

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_n = n^2$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n = \dfrac{n}{a_n^2 a_{n+1}^2}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (12 分) 已知函数 $f(x) = x^3 - x^2 + ax\ (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值，求 a 的值；

(2) 若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，求 a 的取值范围.

19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $c = 2$，$\angle ACB = \dfrac{2\pi}{3}$，$\angle ACB$ 的角平分线交边 AB 于点 D.

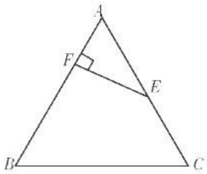
(1) 证明：$\dfrac{AD}{BD} = \dfrac{b}{a}$；

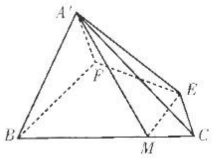
(2) 求线段 CD 长度的最大值.

20.（12 分）已知等边三角形 ABC 的边长为4，点 E 为边 AC 的中点，点 F 在边 AB 上，且满足 $EF\perp AB$，如图所示，以 EF 为折痕将 $\triangle AEF$ 折起，使点 A 到达点 A' 的位置.

（1）证明：平面 $A'BF\perp$ 平面 $BCEF$；

（2）若平面 $A'EF$ 与平面 $BCEF$ 所成角为 $\frac{\pi}{3}$，在线段 BC 上是否存在一点 M，使得平面 $A'ME$ 与平面 $A'BF$ 所成二面角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$，若存在，求出 M 点的位置；若不存在，请说明理由.

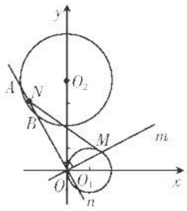




21.（12 分）如图，已知 O 为坐标原点，圆 $O_1:(x-1)^2+y^2=1$，圆 $O_2:x^2+(y-4)^2=4$，直线 $m:y=kx$ 与圆 O_1 交于不同于点 O 的点 M，过原点 O 且垂直于 m 的直线 n 与圆 O_2 交于不同的 A,B 两点，线段 AB 的中点为 N.

（1）求实数 k 的取值范围；

（2）求 $\triangle OMN$ 面积的取值范围.



22.（12 分）已知函数 $f(x)=2(x-m\ln x)$.

（1）讨论 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上的单调性；

（2）若存在不同的正数 p,q，使得 $f(p)+\sin q=f(q)+\sin p$，求证：$\frac{\ln p+\ln q}{2}<\ln|2m|$.

高考利剑文 密封线内不要答题 上进试卷

数学理科答案

1.【答案】D

【解析】由题可知 $A=\{x|x<-2$ 或 $x>2\}$，所以 $A\cap B=\{3,4\}$，故选 D.

2.【答案】C

【解析】$z=\dfrac{4+bi}{i}=\dfrac{(4+bi)i}{i^2}=b-4i$，因为 z 的实部与虚部相等，所以 $b=-4$，即 $z=-4-4i$，所以 $\bar{z}=-4+4i$，故选 C.

3.【答案】B

【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1)$，向量 $\boldsymbol{b}=(1,3)$，则 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=(4,5)$，$\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(2\lambda-1,-\lambda-3)$，又因为 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\parallel(\lambda\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，所以 $4\times(-\lambda-3)-(2\lambda-1)\times5=0$，解得 $\lambda=-\dfrac{1}{2}$，故选 B.

4.【答案】B

【解析】$m=\dfrac{5W\log_2 2\,001}{W\log_2 1\,001}=\dfrac{5\lg 2\,001}{\lg 1\,001}\approx\dfrac{5\lg 2\,000}{\lg 1\,000}=\dfrac{5\times(3+\lg 2)}{3}\approx\dfrac{5\times(3+0.3)}{3}=5.5$，故选 B.

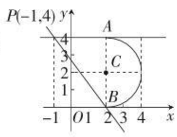
5.【答案】C

【解析】由 $\cos 2\alpha+5\sin\alpha=-2$，可得 $1-2\sin^2\alpha+5\sin\alpha=-2$，整理得 $2\sin^2\alpha-5\sin\alpha-3=0$，解得 $\sin\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 或 $\sin\alpha=3$（舍去）. 又 $\alpha\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)$，所以 $\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故选 C.

6.【答案】D

【解析】当 $\sin x<0$ 时，$f(x)<0$，故 A 错误；$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}\Leftrightarrow a>0>b$ 或 $a<b<0$ 或 $0<a<b$，$\ln a<\ln b\Leftrightarrow 0<a<b$，故 B 错误；由 $a\cos A=b\cos B$ 可得 $\sin 2A=\sin 2B$，所以 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$ 或者 $A=B$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形，故 C 错误；因为 $l_1\parallel l_2$，所以 $(a-1)(a+2)=10$，解得 $a=-4$ 或 3，但 $a=-4$ 时两直线重合，故舍去，所以 $a=3$，故 D 正确，故选 D.

7.【答案】A



【解析】直线 $l:kx-y+k+4=0$ 恒过定点 $(-1,4)$，曲线 C 为圆 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ 的右半部分，当直线斜率为 0 时，直线与圆相切，当直线过 $(2,0)$ 时交于一点，此时斜率为 $-\dfrac{4}{3}$，故选 A.

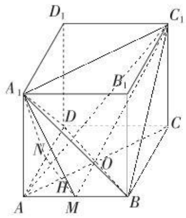
8.【答案】C

【解析】设点 P 在 AB 上的射影为 C，则 $PC=h$. 由 A,B 两点的俯角分别为 α,β，可得 $\angle PAC=\alpha$，$\angle PBC=\beta$，所以 $\dfrac{h}{AC}=\tan\alpha$，$\dfrac{h}{BC}=\tan\beta$，所以 $AB=AC+BC=h\left(\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}\right)$，所以选项 A 中的表达式正确；因为 $AB=h\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}\right)=\dfrac{h(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{h\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$，所以选项 B 中的表达式正确；在 $\triangle PAB$ 中，$\angle APB=\pi-(\alpha+\beta)$，$AP=\dfrac{h}{\sin\alpha}$，$BP=\dfrac{h}{\sin\beta}$，由余弦定理，得 $AB^2=\dfrac{h^2}{\sin^2\alpha}+\dfrac{h^2}{\sin^2\beta}-2\dfrac{h}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{h}{\sin\beta}\cos[\pi-(\alpha+\beta)]$，所以 $AB=h\cdot\sqrt{\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}+\dfrac{2\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}}$，所以选项 C 中的表达式错误，选项 D 中的表达式正确，故选 C.

9.【答案】D

【解析】$\because CC_1\perp$ 平面 $ABCD$，$\therefore CC_1\perp BD$，又 $\because BD\perp AC$，$AC\cap CC_1=C$，$\therefore BD\perp$ 平面 ACC_1，$BD\subset$ 平面 A_1BD，$\therefore$ 平面

$A_1BD\perp$平面ACC_1,$\because M,N$分别为AB,AD的中点,$\therefore MN/\!/BD$,$\therefore MN\perp$平面ACC_1,又$MN\subset$平面A_1MN,$\therefore$平面$A_1MN\perp$平面ACC_1,所以A,B都正确;设$MN\cap AC=H$,则$\angle HC_1M$即为MC_1与平面ACC_1所成的角,设正方体的棱长为4,则$MH=\sqrt{2}$,$MC=2\sqrt{5}$,$MC_1=6$,$\sin\angle HC_1M=\frac{MH}{MC_1}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,C正确;设$AC$与$BD$的交点为$O$,$BC_1$与平面$ACC_1$所成角即为$\angle BC_1O$,$\sin\angle BC_1O=\frac{BO}{BC_1}=\frac{1}{2}$,D错误,故选D.



10.【答案】A

【解析】设点$P(x_0,y_0)$,则点P满足$x_0^2-\frac{y_0^2}{8}=1$①,两条渐近线为$l_1:y=2\sqrt{2}x$,$l_2:y=-2\sqrt{2}x$,点P到两条渐近线的距离分别为$d_1=\frac{|2\sqrt{2}x_0-y_0|}{3}$,$d_2=\frac{|2\sqrt{2}x_0+y_0|}{3}$,则$d_1d_2=\frac{|8x_0^2-y_0^2|}{9}$②,将①代入②得到$d_1d_2=\frac{8}{9}$,所以$\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|PN|}=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{d_1d_2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,故选A.

11.【答案】D

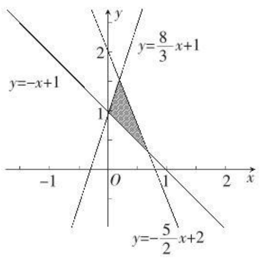
【解析】$f(x)=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{1}{x+1}+2$,可见$f(x)$的图象关于点$(-1,2)$中心对称.因为$h(x-1)$是奇函数,所以$h(x)$的图象关于点$(-1,0)$中心对称,$y=h(x)+2$的图象关于点$(-1,2)$中心对称,因为$f(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$,所以$n$为偶数,由于两个函数的对称中心皆为点$(-1,2)$,所以它们图象的交点也关于点$(-1,2)$中心对称,$P=-n$,$Q=2n$,故选D.

12.【答案】B

【解析】$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0)$.①$\frac{4\pi}{7}-\frac{3\pi}{7}\leqslant\frac{T}{2}=\frac{\pi}{\omega}$,$\omega\in(0,7]$.②$f'(x)=a\omega\cos\omega x-b\omega\sin\omega x$,$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\Rightarrow\frac{a}{b}=\tan\frac{\pi\omega}{6}$.③要使符合题意,则点$(b,\sqrt{2}a)$在直线$y=\pm\sqrt{a^2+b^2}$之间,$|\sqrt{2}a|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\Rightarrow\frac{a}{b}\in[-1,1]$,即$-1\leqslant\tan\frac{\pi\omega}{6}\leqslant 1$,$\omega\in\left[-\frac{3}{2}+6k,\frac{3}{2}+6k\right](k\in\mathbf{Z})$.综上,故选B.

13.【答案】1

【解析】根据约束条件画出如图所示的可行区域,再利用几何意义求最值,由$z=y-3x$,设直线$l:y=3x+z$,z为直线l的截距,当直线l经过$8x-3y+3=0$与$x+y-1=0$的交点$(0,1)$时,z取得最大值1.



14.【答案】10

【解析】记第 n 天施舍了 a_n 个子安贝，则数列 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项、2 为公比的等比数列，故 $a_n=2^n(1\leqslant n\leqslant 30)$，所以 $S_n=\frac{2(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1}-2$，令 $2^{n+1}-2>2\ 023$，得 $2^{n+1}>2\ 025$，因为 $2^{10}=1\ 024<2\ 025$，$2^{11}=2\ 048>2\ 025$，所以 n 的最小值为 10.

15.【答案】$(60,100)$（写成 $60<a<100$ 或 $\{a|60<a<100\}$ 均给分）

【解析】根据题意，得 $(a-40)^2+(a-20)^2-a^2<0$，整理得 $(a-20)(a-100)<0$，解得 $20<a<100$. 又 $a-40+a-20>a$，解得 $a>60$，所以 $60<a<100$.

16.【答案】$(x-1)^2(x+1)$　$\frac{2\sqrt{3}}{9}$（第一空 2 分，第二空 3 分）

【解析】$f(x)=(x-a)(x-b)(x+1)$，当 $a=b$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点，其中一个为 -1，另一个必为 1，于是 $a=b=1$，$f(x)=(x-1)^2(x+1)$；当 $f(x)$ 有 3 个零点时，因为函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴的交点关于 y 轴对称，所以 0 是函数 $f(x)$ 的零点，从而 1 也是函数 $f(x)$ 的零点，于是 $f(x)=x(x-1)(x+1)$，$f'(x)=3x^2-1$，由 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$，显然当 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值，极大值为 $\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

17. 解：(1) 当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$；(1 分)

当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$，(3 分)

对 $n=1$ 也适用，所以 $a_n=2n-1$.(5 分)

(2) 因为 $a_n=2n-1$，

所以 $b_n=\frac{n}{a_n^2a_{n+1}^2}=\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\cdot\frac{(2n+1)^2-(2n-1)^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$，(7 分)

所以 $T_n=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]$

$=\frac{1}{8}\left[1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right]=\frac{n^2+n}{2(2n+1)^2}$.(10 分)

18. 解：(1) 由题意可知，$f'(x)=3x^2-2x+a$，(1 分)

由 $f'(1)=1+a=0$，得 $a=-1$.(2 分)

检验：当 $a=-1$ 时，$f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$，(3 分)

令 $f'(x)>0$ 得，$x<-\frac{1}{3}$ 或 $x>1$，

令 $f'(x)<0$ 得，$-\frac{1}{3}<x<1$，(5 分)

所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)$，$(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{3},1\right)$ 上单调递减.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值，符合题意.

所以 $a=-1$.(6 分)

(2) 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

所以 $f'(x)=3x^2-2x+a\geqslant 0$ 在 $[0,1]$ 上恒成立.(8 分)

所以 $a\geqslant -3x^2+2x$ 在 $[0,1]$ 上恒成立.(9 分)

令 $g(x)=-3x^2+2x$，$x\in[0,1]$，

则 $g(x)_{\max}=g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$，

所以 a 的取值范围是 $a\geqslant\frac{1}{3}$.(12 分)

19. (1)证明:在△ACD中,由正弦定理知$\frac{AD}{\sin\angle ACD}=\frac{CD}{\sin A}$,即$AD=\frac{CD\sin\angle ACD}{\sin A}$,(1分)

同理,在△BCD中,$BD=\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin B}$,(2分)

所以$\frac{AD}{BD}=\frac{\frac{CD\sin\angle ACD}{\sin A}}{\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin B}}$,(3分)

因为CD为$\angle ACB$的角平分线,

所以$\angle ACD=\angle BCD$,

所以$\frac{AD}{BD}=\frac{\frac{CD\sin\angle ACD}{\sin A}}{\frac{CD\sin\angle BCD}{\sin B}}=\frac{\sin B}{\sin A}=\frac{b}{a}$.(5分)

注:其他解法酌情给分.

(2)解:由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$,

得$\frac{1}{2}ab\sin\angle ACB=\frac{1}{2}\cdot b\cdot CD\cdot\sin\angle ACD+\frac{1}{2}\cdot a\cdot CD\cdot\sin\angle BCD$,

即$ab=CD\cdot(a+b)$,故$CD=\frac{ab}{a+b}$,(8分)

在△ABC中,由余弦定理得$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\angle ACB$,

所以$4=a^2+b^2+ab=(a+b)^2-ab$,

则$(a+b)^2-4=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,

所以$a+b\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$.(10分)

故$CD=\frac{(a+b)^2-4}{a+b}=a+b-\frac{4}{a+b}$,

令$t=a+b$,$0<t\leqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

则$CD=t-\frac{4}{t}$在$\left(0,\frac{4\sqrt{3}}{3}\right]$上单调递增,

所以$CD_{\max}=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.(12分)

20. (1)证明:因为$EF\perp AB$,

所以$EF\perp A'F$,$EF\perp BF$.(2分)

又$A'F\cap BF=F$,$A'F$,$BF\subset$平面$A'BF$,

所以$EF\perp$平面$A'BF$,

又$EF\subset$平面$BCEF$,

所以平面$A'BF\perp$平面$BCEF$.(4分)

(2)解:由题意,平面$A'EF$与平面$BCEF$所成角为$\frac{\pi}{3}$,即$\angle A'FB=\frac{\pi}{3}$,

过点A'作$A'O\perp BF$,垂足为O,过点O作$OG/\!/EF$,

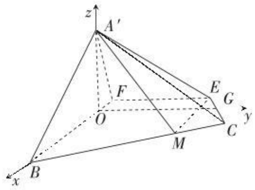
因为$EF\perp BF$,所以$OG\perp BF$.

因为平面$A'BF\perp$平面$BCEF$,所以$A'O\perp$平面$BCEF$,(5分)

以O为坐标原点,OB,OG,OA'所在直线分别为x,y,z轴建立空间直角坐标系.

假设线段BC上存在一点M,使得平面$A'ME$与平面$A'BF$所成二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,设$BM=2a(0\leqslant a\leqslant 2)$,则

数学理科 第4页(共6页)



$M\left(\frac{5}{2}-a,\sqrt{3}a,0\right),A'\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right),E\left(-\frac{1}{2},\sqrt{3},0\right)$,

所以$\overrightarrow{A'M}=\left(\frac{5}{2}-a,\sqrt{3}a,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{A'E}=\left(-\frac{1}{2},\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,(7 分)

设平面 $A'ME$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A'M}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{A'E}=0,\end{cases}$

所以$\begin{cases}\left(\frac{5}{2}-a\right)x+\sqrt{3}ay-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ -\frac{1}{2}x+\sqrt{3}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}(a-1)y}{a-3},\\ z=\frac{(a-5)y}{a-3},\end{cases}$

令 $y=a-3$,则 $x=\sqrt{3}(a-1),z=a-5$,

所以 $\boldsymbol{n}_1=(\sqrt{3}(a-1),a-3,a-5)$,(9 分)

易知平面 $A'BF$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$.(10 分)

因为平面 $A'ME$ 与平面 $A'BF$ 所成二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以$\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,即$\frac{|a-3|}{\sqrt{3(a-1)^2+(a-3)^2+(a-5)^2}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$,(11 分)

解得 $a=1$,即 $BM=2$,

所以存在符合题意的 M 点,且 M 为 BC 的中点.(12 分)

21. 解:(1)当 $k\neq0$ 时,直线 n:$y=-\frac{1}{k}x$,

圆心 O_2 到直线 n 的距离 $d=\frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}}<2$,$\therefore k^2<\frac{1}{3}$且 $k\neq0$.(3 分)

当 $k=0$ 时,直线 m,n 符合题意,(4 分)

综上所述,实数 k 的取值范围为$-\frac{\sqrt{3}}{3}<k<\frac{\sqrt{3}}{3}$.(5 分)

(2)方法一:$\because$ 圆心 O_1 到直线 m 的距离 $d_1=\frac{|k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

$\therefore$ 由垂径定理得$\left(\frac{1}{2}OM\right)^2+d_1^2=1\Rightarrow OM^2=4\left(1-\frac{k^2}{k^2+1}\right)=\frac{4}{k^2+1}$.(7 分)

又$\because$ 圆心 O_2 到直线 n 的距离 $d_2=\frac{|4k|}{\sqrt{k^2+1}}$,

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_2N$ 中,有 $ON^2+d_2^2=16\Rightarrow ON^2=16-\frac{16k^2}{k^2+1}=\frac{16}{k^2+1}$.(9 分)

$\therefore S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}OM\cdot ON=\frac{1}{2}\times\frac{2\times4}{k^2+1}=\frac{4}{k^2+1}$,(10 分)

$\because 0\leqslant k^2<\frac{1}{3}$,

$\therefore 3<S_{\triangle OMN}\leqslant4$,即$\triangle OMN$ 面积的取值范围为$(3,4]$.(12 分)

方法二:当 $k\neq0$ 时,联立$\begin{cases}y=kx,\\ (x-1)^2+y^2=1\end{cases}\Rightarrow(k^2+1)x^2-2x=0$,

$\therefore$ 点 $M\left(\frac{2}{1+k^2},\frac{2k}{1+k^2}\right)$,(6 分)

联立$\begin{cases}y=-\frac{1}{k}x,\\ x^2+(y-4)^2=4\end{cases}\Rightarrow(k^2+1)y^2-8y+12=0$,

由韦达定理有 $y_1+y_2=\frac{8}{k^2+1}\Rightarrow y_N=\frac{4}{k^2+1}$,

又∵点 N 在直线 $y=-\frac{1}{k}x$ 上,则点 $N\left(\frac{-4k}{k^2+1},\frac{4}{k^2+1}\right)$.(8分)

$\therefore S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}OM\cdot ON=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{4}{(1+k^2)^2}+\frac{4k^2}{(1+k^2)^2}}\cdot\sqrt{\frac{16k^2}{(k^2+1)^2}+\frac{16}{(k^2+1)^2}}=\frac{4}{1+k^2}$,

$\because 0<k^2<\frac{1}{3}$, $\therefore 3<S_{\triangle OMN}=\frac{4}{1+k^2}<4$.(10分)

当 $k=0$ 时,点 $M(2,0)$,$N(0,4)$,此时 $S_{\triangle OMN}=\frac{1}{2}\times2\times4=4$.(11分)

综上所述,$\triangle OMN$ 面积的取值范围为 $(3,4]$.(12分)

22.(1)解:依题意,$f'(x)=2\left(1-\frac{m}{x}\right)=\frac{2(x-m)}{x}$,(1分)

当 $m\leqslant2$ 时,$f'(x)\geqslant0$,则函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递增;(2分)

当 $2<m<4$ 时,令 $f'(x)=0$,得 $x=m$,则当 $x\in[2,m)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in(m,4]$ 时,$f'(x)>0$,故函数 $f(x)$ 在 $[2,m)$ 上单调递减,在 $(m,4]$ 上单调递增;(3分)

当 $m\geqslant4$ 时,$f'(x)\leqslant0$,则函数 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减.(4分)

综上所述,当 $m\leqslant2$ 时,$f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递增;当 $2<m<4$ 时,$f(x)$ 在 $[2,m)$ 上单调递减,在 $(m,4]$ 上单调递增;当 $m\geqslant4$ 时,$f(x)$ 在 $[2,4]$ 上单调递减.(5分)

(2)证明:依题意,$f(p)+\sin q=f(q)+\sin p\Leftrightarrow f(p)-\sin p=f(q)-\sin q$,

令 $g(x)=f(x)-\sin x=2x-2m\ln x-\sin x$,$x\in(0,+\infty)$,

不妨设 $0<p<q$,因为 $g(p)=g(q)$,故 $2p-2m\ln p-\sin p=2q-2m\ln q-\sin q$,

故 $2m(\ln q-\ln p)=2(q-p)-(\sin q-\sin p)$,(6分)

令 $y=x-\sin x$,则 $y'=1-\cos x\geqslant0$,故函数 $y=x-\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,(7分)

因为 $q-\sin q>p-\sin p$,从而 $q-p>\sin q-\sin p$,

故 $2m(\ln q-\ln p)=2(q-p)-(\sin q-\sin p)>2(q-p)-(q-p)=q-p$,

故 $2m>\frac{q-p}{\ln q-\ln p}>0$,(8分)

要证 $\frac{\ln p+\ln q}{2}<\ln|2m|$,即证 $2m>\sqrt{pq}$,下面证明 $\frac{q-p}{\ln q-\ln p}>\sqrt{pq}$.(9分)

令 $\frac{q}{p}=t$,则 $t>1$,即证 $\frac{t-1}{\ln t}>\sqrt{t}$,只要证明 $\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}<0$ 在 $t>1$ 时恒成立,

设 $m(t)=\ln t-\frac{t-1}{\sqrt{t}}(t>1)$,则 $m'(t)=-\frac{(\sqrt{t}-1)^2}{2t\sqrt{t}}<0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立,(10分)

故 $m(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减,故 $m(t)<m(1)=0$,(11分)

故 $\frac{q-p}{\ln q-\ln p}>\sqrt{pq}$,则 $2m>\frac{q-p}{\ln q-\ln p}>\sqrt{pq}$,即 $\frac{\ln p+\ln q}{2}<\ln|2m|$.(12分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。