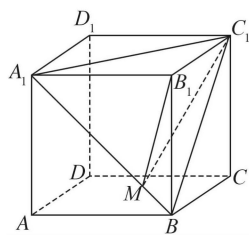


2022~2023 学年度皖北县中联盟 5 月联考·高三数学
参考答案、提示及评分细则

1. A $\frac{\bar{z}}{1+2i}=1-i, z=(1+2i)(1-i)=3+i$, 则 $\bar{z}=3-i$, 所以 \bar{z} 的虚部为 -1 , 故选 A.
2. B 由题知, $N=\{x|\log_4|x|\leq\frac{1}{2}\}\Rightarrow 0<|x|\leq 2\Rightarrow -2\leq x\leq 2$ 且 $x\neq 0$, 又 $M=\{x|-3<x\leq 1\}$, 则 $M\cap N=\{x|-2\leq x<0$ 或 $0<x\leq 1\}$, 故选 B.
3. A 4 个男生和 2 个女生随机排成一行, 可利用插空法, 先排 4 个男生有 A_4^4 种排法, 4 个男生产生 5 个空, 将 2 个女生插入 5 个空中; 有 A_5^2 种排法, 6 名学生共有 A_6^6 种排法, 所以 2 个女生不相邻的概率为 $P=\frac{A_4^4 A_5^2}{A_6^6}=\frac{2}{3}$. 故选 A.
4. C $\because |a|=2|b|$, 向量 b 在向量 a 上的投影向量是 $\frac{1}{4}a$, $\therefore |b|\cos\langle a, b\rangle\frac{a}{|a|}=(\frac{|b|}{|a|}\cos\langle a, b\rangle)a=(\frac{1}{2}\cos\langle a, b\rangle)a=\frac{1}{4}a$, 则 $\frac{1}{2}\cos\langle a, b\rangle=\frac{1}{4}$, 即 $\cos\langle a, b\rangle=\frac{1}{2}$, 且 $\langle a, b\rangle\in[0, \pi]$, 则 $\langle a, b\rangle=\frac{\pi}{3}$, 故选 C.
5. B 由题意知, 从点 $E(-4, 0)$ 出发的光线与圆 C 相离时, 光线不被挡住. 设过点 $E(-4, 0)$ 与圆 C 相切的直线方程为 $l: y=k(x+4)$, 即 $kx-y+4k=0$, 又圆 $C: x^2+y^2=4$, 所以圆心 $C(0, 0)$ 到 l 的距离 $d=\frac{|4k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=2$, 解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 $l: y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$, 令 $x=3, y=\pm\frac{7\sqrt{3}}{3}$, 即 $m>\frac{7\sqrt{3}}{3}$ 或 $m<-\frac{7\sqrt{3}}{3}$. 故选 B.
6. D 因为 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{AA_1}$, 所以 A_1, M, B 三点共线, 连接 C_1B, A_1C_1, B_1M , 因为 $C_1B_1\perp$ 平面 AA_1B , 所以直线 C_1M 与平面 AA_1B 所成角为 $\angle C_1MB_1$, 其正弦值为 $\frac{C_1B_1}{C_1M}$, $C_1B=A_1C_1=A_1B=\sqrt{2}C_1B_1$, 当 $C_1M\perp A_1B$ 时, $C_1M=\frac{\sqrt{3}}{2}C_1B=\frac{\sqrt{6}}{2}C_1B_1$, 所以 $\frac{\sqrt{6}}{2}C_1B_1\leq C_1M\leq\sqrt{2}C_1B_1$, 则 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\frac{C_1B_1}{C_1M}\leq\frac{\sqrt{6}}{3}$, 所以直线 C_1M 与平面 AA_1B 所成角的正弦值的取值范围是 $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3}]$. 故选 D.
7. D 由题意: $\frac{f'(x)}{f(x)}<\frac{g'(x)}{g(x)}\Rightarrow f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,
 设 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 则 $F'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, 由 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$ 得 $F'(x)<0$, 因为 $x_1<x_2$, 所以 $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}<\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$, 又 $f(x), g(x)$ 是定义域为 \mathbf{R} 的恒大于 0 的可导函数, 故 $f(x)g(x_1)<f(x_1)g(x)$, B 错误, $f(x_2)g(x_1)<f(x_1)g(x_2)$, A 错误;
 $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}<\frac{f(x_1)}{g(x_1)}\Rightarrow\frac{f(x_2)}{g(x_2)}-1<\frac{f(x_1)}{g(x_1)}-1\Rightarrow\frac{f(x_2)-g(x_2)}{g(x_2)}<\frac{f(x_1)-g(x_1)}{g(x_1)}$,
 因为 $f(x_2)-g(x_2), f(x_1)-g(x_1)$ 不知道正负, 所以 C 不一定成立;
 $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}<\frac{f(x_1)}{g(x_1)}\Rightarrow\frac{g(x_1)}{g(x_2)}<\frac{f(x_1)}{f(x_2)}\Rightarrow\frac{g(x_2)+g(x_1)}{g(x_2)}<\frac{f(x_2)+f(x_1)}{f(x_2)}$, 即 $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{g(x_1)+g(x_2)}$, D 正确.
8. C 令 $f(x)=(\frac{2}{10})^x+(\frac{8}{10})^x, f(1)=1, f(x)$ 在 \mathbf{R} 上单调递减, $t>1$ 时, $(\frac{2}{10})^t+(\frac{8}{10})^t<1$,
 $\therefore 2^t+8^t<10^t$, 即 $m<t, \therefore 10^t-2^t>8^t, \therefore n>t$, 即 $n>t>m, \therefore n-t<n-m$, 排除 AB.
 $t=2$ 时, $m=\lg 68, n=\log_8 96, n-t=\log_8 96-2=\log_8 \frac{3}{2}=\frac{\lg \frac{3}{2}}{\lg 8}, t-m=2-\lg 68=\lg \frac{25}{17}=\frac{\lg \frac{25}{17}}{\lg 10}$,
 显然 $\lg \frac{3}{2}>\lg \frac{25}{17}>0, 0<\lg 8<\lg 10$, 所以 $n-t>t-m$, 选 C. $0<t<1$ 时可得相同结论, $t=1$ 时取“=”.
9. AB 由已知函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 上也单调递增, $f(0)=0$,



由 $f(-1)=f(3)=2$, 得 $f(1)=f(-3)=-2$.

对于 A, 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 所以 $f(-2) > f(-3) = -2$, A 正确;

对于 B, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = -2, f(3) = 2$, 故在 $(0, +\infty)$ 上有且只有一个 $x_0 \in (1, 3)$, 使 $f(x_0) = 0$, 同理 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 且 $f(-1) = 2, f(-3) = -2$, 故在 $(-\infty, 0)$ 上有且只有一个 $x_1 \in (-3, -1)$, 使 $f(x_1) = 0$, 又 $f(0) = 0$, 所以 $f(x)$ 有 3 个零点, B 正确;

对于 C, 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f(2) > f(1) = -2$, C 错误;

对于 D, $f(5) > f(3) = 2, f(-\frac{1}{2}) > f(-1) = 2$, 易知 $f(5)$ 与 $f(-\frac{1}{2})$ 无法比较大小, D 不一定正确. 故选 AB.

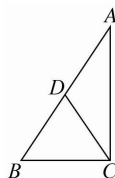
10. BCD 如图, 在边 AB 上取一点 D, 使 $DB=DC$.

设 $DB=DC=x$, 则 $\angle B = \angle DCB$, $\therefore \angle ACD = \angle ACB - \angle B$.

$$\cos \angle ACD = \frac{x^2 + 9 - (4-x)^2}{6x} = \frac{3}{4}, \text{解得 } x=2, \therefore AD=BD=DC=2.$$

$$\text{在 } \triangle ADC \text{ 中, } \cos \angle ADC = \frac{4+4-9}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{1}{8},$$

$$\therefore \cos \angle BDC = \frac{1}{8} = \frac{4+4-BC^2}{8}, \text{解得 } BC=\sqrt{7}, \therefore BC^2 + AC^2 = AB^2, \therefore \triangle ABC \text{ 为直角三角形, B 错误.}$$



CD 为斜边 AB 上的中线, 所以 A 正确; $\cos B = \frac{\sqrt{7}}{4}$, C 错误; $\triangle ABC$ 的周长为 $7 + \sqrt{7}$, D 错误. 故选 BCD.

11. ABD 对于 A, 由椭圆的定义知, 四边形 AF_1BF_2 的周长为 $2a+2a=4a=16$, A 正确;

$$\text{对于 B, 设 } A(x_1, y_1), \text{ 则 } B(-x_1, -y_1), \text{ 又 } M(0, 3), \text{ 所以 } k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{y_1-3}{x_1} \cdot \frac{-y_1-3}{-x_1} = \frac{y_1^2-9}{x_1^2}.$$

$$\text{因为点 } A(x_1, y_1) \text{ 在椭圆上, 所以 } \frac{x_1^2}{16} + \frac{y_1^2}{9} = 1, \text{ 即 } x_1^2 = 16(1 - \frac{y_1^2}{9}) = \frac{16}{9}(9 - y_1^2),$$

$$\text{所以 } k_{MA} \cdot k_{MB} = \frac{y_1^2-9}{x_1^2} = -\frac{9}{16}, \text{ B 正确;}$$

$$\text{对于 C, } \frac{1}{|AF_1|} + \frac{4}{|BF_1|} = \frac{1}{|AF_1|} + \frac{4}{|AF_2|} = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{|AF_1|} + \frac{4}{|AF_2|} \right) (|AF_1| + |AF_2|) = \frac{1}{8} \left(1 + 4 + \frac{|AF_2|}{|AF_1|} + \frac{4|AF_1|}{|AF_2|} \right) \geq \frac{9}{8}, \text{ 当且仅当 } |AF_1| = \frac{8}{3}, |AF_2| = \frac{16}{3} \text{ 时等号成立, 故 C 错误;}$$

$$\text{对于 D, 设 } C(t, 0) (-\sqrt{7} < t < \sqrt{7}), \text{ 则 } \frac{|F_1C|}{|F_2C|} = \frac{t+\sqrt{7}}{\sqrt{7}-t} = \frac{|AF_1|}{|AF_2|}, |AF_1| + |AF_2| = 8,$$

$$\text{所以 } |AF_1| = 4\left(\frac{\sqrt{7}}{7}t + 1\right), |AF_2| = 4\left(1 - \frac{\sqrt{7}}{7}t\right),$$

$$\text{在椭圆 } C: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ 中, 由其第二定义 } e = \frac{|AF_1|}{d} \text{ (d 指的是椭圆上的点到相应的准线的距离) 得 } |AF_1| =$$

$$de = \left(x_1 + \frac{a^2}{c}\right) \cdot e = \frac{\sqrt{7}}{4}x_1 + 4,$$

$$\therefore |AF_1| = 4 + \frac{\sqrt{7}}{4}x_1 = 4\left(\frac{\sqrt{7}}{7}t + 1\right), \text{ 所以 } x_1 = \frac{16t}{7}, \text{ 故 } A\left(\frac{16t}{7}, y_1\right), C(t, 0), D\left(0, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\text{因为三点共线, 所以 } \frac{y_1}{\frac{16t}{7}-t} = \frac{\frac{1}{2}}{t} \Rightarrow y_1 = \frac{9}{14}, \text{ 故 D 正确. 故选 ABD.}$$

12. AB 对于 A, 勒洛四面体能在两个平行平面间自由转动, 并且始终保持与两平面都接触,

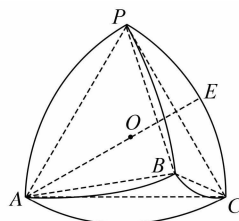
所以其表面上任意两点间距离的最大值即为其内接四面体 $PABC$ 的棱长 1. 所以 A 对;

对于 B, 勒洛四面体的内切球与勒洛四面体的弧面相切, 如图,

其中点 E 为该球与勒洛四面体的一个切点, O 为该球的球心, 易知该球的球心 O 为正四面体 $PABC$ 的中心, 半径为 OE, 连接 AE,

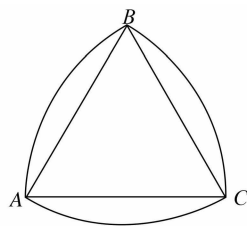
$$\text{易知 A, O, E 三点共线, 且 } AE=1, OA = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{因此 } OE = 1 - \frac{\sqrt{6}}{4}, \text{ 内切球的表面积为 } 4\pi R^2 = \frac{(11-4\sqrt{6})\pi}{2}, \text{ 故 B 正确;}$$



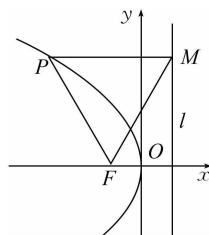
对于 C, 截面如图所示, 为三个半径为 1, 圆心角为 60° 的扇形面积减去两个边长为 1 的正三角形的面积, $3 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} \times \pi - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{2}$, C 错误;

对于 D, 勒洛四面体的体积介于正四面体 $PABC$ 的体积和正四面体 $PABC$ 的外接球的体积之间, 正四面体 $PABC$ 的体积 $V_1 = \frac{\sqrt{2}}{12}$, 其外接球的体积 $V_2 = \frac{\sqrt{6}\pi}{8}$, 故 D 错误.



13. $100 - n$ 近似服从正态分布 $N(50, \sigma^2)$, 故 $P(x > 80) = P(x < 20) = 1 - P(X \geq 20) = 0.10$, $P(20 \leq x \leq 80) = 1 - P(x < 20) - P(x > 80) = 0.8$, 估计小明一共统计的天数为 $\frac{80}{0.8} = 100$.

14. $2\sqrt{21}$ 由题意曲线 C 为抛物线 $y^2 = -8x$, 不妨设点 P 在第二象限, 由抛物线定义可得 $|PF| = |PM|$, 又 $|PF| = |MF|$, 所以 $\triangle PMF$ 是等边三角形. 所以 $\angle MFO = 60^\circ$, 则 $|PM| = |MF| = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$, 则 $x_P = -6$, $y_P = \sqrt{6 \times 8} = 4\sqrt{3}$, 则 $|OP| = \sqrt{36 + 48} =$



$2\sqrt{21}$.

15. 4 由题意可知, 需要使 $(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)$ 变成绿色, 其他点都是红色, 第一步: $(0, 3)$ 变成绿色, 则 $(0, 2), (1, 3)$ 也变成绿色; 第二步: $(1, 2)$ 变成绿色, 则 $(0, 2), (1, 3)$ 变成红色, $(1, 1), (2, 2)$ 变成绿色; 第三步: $(2, 1)$ 变成绿色, 则 $(1, 1), (2, 2)$ 变成红色, $(2, 0), (3, 1)$ 变成绿色; 第四步: $(3, 0)$ 变成绿色, 则 $(2, 0), (3, 1)$ 变成红色.

16. $[-\frac{11}{10}, -\frac{13}{12}]$ 由题意可得 $c_1 + 3c_2 + \dots + 3^{n-2}c_{n-1} + 3^{n-1}c_n = \frac{n}{2} \cdot 3^n$,

$$\therefore n \geq 2 \text{ 时, } c_1 + 3c_2 + \dots + 3^{n-2}c_{n-1} = \frac{n-1}{2} \cdot 3^{n-1},$$

$$\text{两式相减可得: } 3^{n-1}c_n = \frac{n}{2} \cdot 3^n - \frac{n-1}{2} \cdot 3^{n-1}, \text{ 化为 } c_n = n + \frac{1}{2}.$$

$$n=1 \text{ 时, } c_1 = \frac{3}{2}, \text{ 满足上式,}$$

$$\text{故 } c_n = n + \frac{1}{2}, n \in \mathbf{N}^*, \text{ 故 } H_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + p(1 + 2 + \dots + n) = \frac{n(\frac{3}{2} + n + \frac{1}{2})}{2} + p \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+2)}{2} + p \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n^2 \cdot \frac{1+p}{2} + n \cdot \frac{2+p}{2},$$

$\therefore H_n \leq H_5$ 对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

$$\therefore \begin{cases} H_4 \leq H_5 \\ H_6 \leq H_5 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 12 + 10p \leq \frac{35}{2} + 15p \\ 24 + 21p \leq \frac{35}{2} + 15p \end{cases}, \text{ 解得 } -\frac{11}{10} \leq p \leq -\frac{13}{12}, \text{ 即 } p \in [-\frac{11}{10}, -\frac{13}{12}].$$

17. 解: (1) $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) \cos(\omega x + \varphi) - \sqrt{3} \cos^2(\omega x + \varphi) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \sin(2\omega x + 2\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2} [2 \cos^2(\omega x + \varphi) - 1]$
 $= \frac{1}{2} \sin(2\omega x + 2\varphi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos(2\omega x + 2\varphi) = \sin(2\omega x + 2\varphi - \frac{\pi}{3}), \dots \dots \dots 2 \text{ 分}$

因为函数 $f(x)$ 图象的相邻两对称轴间的距离为 $\frac{\pi}{2}$, 所以 $T = \pi$, 可得 $\omega = 1. \dots \dots \dots 3 \text{ 分}$

又因为函数 $f(x) = \sin(2x + 2\varphi - \frac{\pi}{3})$ 为奇函数,

$$\text{所以 } f(0) = \sin(2\varphi - \frac{\pi}{3}) = 0, \text{ 则 } 2\varphi - \frac{\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } \varphi = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{由 } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \text{ 得 } \varphi = \frac{\pi}{6}. \dots \dots \dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } 2\omega f(x + \frac{\varphi}{2}) = m \Rightarrow 2\sin(2x + \frac{\pi}{6}) = m, \text{ 即 } \sin(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{m}{2}.$$

$$\text{因为 } x \in [-\frac{\pi}{12}, \pi], \text{ 可得 } 2x + \frac{\pi}{6} \in [0, \frac{13\pi}{6}],$$

结合正弦函数图象知, $\frac{m}{2} \in [0, \frac{1}{2}]$, 即 $m \in [0, 1]$ 7分

且 $2x_2 + \frac{\pi}{6} + 2x_3 + \frac{\pi}{6} = 3\pi, 2x_3 + \frac{\pi}{6} - (2x_1 + \frac{\pi}{6}) = 2\pi$, 则 $x_2 + x_3 = \frac{4\pi}{3}, x_3 - x_1 = \pi$, 9分

故 $m \cdot \frac{x_2 + x_3}{x_1 - x_3} \in [-\frac{4}{3}, 0]$ 10分

18. (1) 证明: $\because a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - 3)(a_n - 3)$,

$\therefore 2a_n - 2a_{n+1} = (a_{n+1} - 3)(a_n - 3) \Rightarrow 2(a_n - 3) - 2(a_{n+1} - 3) = (a_{n+1} - 3)(a_n - 3)$, 2分

$\therefore \frac{2}{a_{n+1} - 3} - \frac{2}{a_n - 3} = 1 (a_n \neq 3), \frac{2}{a_1 - 3} = 2$ 4分

$\therefore \{\frac{2}{a_n - 3}\}$ 是首项为 2, 公差为 1 的等差数列. 6分

(2) 解: 因为 $\frac{2}{a_n - 3} = 2 + n - 1 = n + 1$, 7分

所以 $a_n - 3 = \frac{2}{n+1}, a_{n+1} - 3 = \frac{2}{n+2}$,

所以 $b_n = (a_n - 3)(a_{n+1} - 3) = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{2}{n+2} = 4(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$, 9分

$T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 4 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + 4 \times (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + 4(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = 4 \times (\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}) = \frac{2n}{n+2}$.

..... 12分

19. 解: (1) 由题意可知 $P-ABC$ 为一个三棱锥, 且 $PA=PB=PC$,

因为 $BC=2, EF=1$, 所以 D, E, F 分别为 PA, PB, PC 的中点, 且 $AB=2DE=2\sqrt{5}$.

取 AB 的中点 M , 连接 PM, CM , 则 $PM \perp AB$.

因为 $AC=4, BC=2, AB=2\sqrt{5}$,

所以 $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 所以 $CA \perp CB$ 2分

$\therefore AM=CM=\sqrt{5}$, 则 $\triangle PAM \cong \triangle PCM$, 故 $\angle PMA = \angle PMC = 90^\circ$,

即 $PM \perp MC$ 3分

因为 $PM \perp AB, AB \cap MC = M, AB, MC \subset$ 平面 ABC ,

所以 $PM \perp$ 平面 ABC 4分

又 $PM \subset$ 平面 ABD , 故平面 $ABD \perp$ 平面 ABC 5分

(2) 因为 $V_{F-BCD} = \frac{1}{2}V_{D-BCP} = \frac{1}{4}V_{A-BCP} = \frac{1}{4}V_{P-ABC} = 2$, 所以 $V_{P-ABC} = 8$ 6分

而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$,

所以 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times PM = \frac{1}{3} \times 4 \times PM = 8$, 解得 $PM = 6$ 7分

以 C 为坐标原点, CA, CB 所在直线分别为 x 轴, y 轴, 过点 C 且垂直于平面 ABC 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $A(4, 0, 0), P(2, 1, 6), B(0, 2, 0), D(3, \frac{1}{2}, 3), F(1, \frac{1}{2}, 3)$ 8分

设 $\mathbf{n}_1 = (x, y, z)$ 为平面 EBD 的一个法向量,

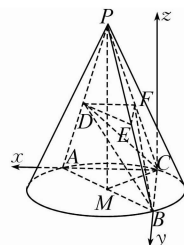
因为 $\begin{cases} \vec{AB} = (-4, 2, 0) \\ \vec{AP} = (-2, 1, 6) \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AB} = -4x + 2y = 0 \\ \mathbf{n}_1 \cdot \vec{AP} = -2x + y + 6z = 0 \end{cases}$,

不妨设 $x=1$, 则平面 EBD 的一个法向量 $\mathbf{n}_1 = (1, 2, 0)$.

同理可求得平面 BDF 的一个法向量 $\mathbf{n}_2 = (0, 2, 1)$ 10分

所以 $|\cos \langle \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \rangle| = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{0+4+0}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{4}{5}$, 11分

所以平面 EBD 与平面 BDF 夹角的正切值为 $\frac{3}{4}$ 12分



20. 解: (1) 由题意知, 每辆汽车第一轮质量检测被列为不合格汽车的概率为 $C_2^3 p^2(1-p) + C_3^3 p^3$, 1分

每辆汽车重新检测被列为不合格汽车的概率为 $C_3^3 p(1-p)^2[1-(1-p)^2]$, 3分
 综上所述,每辆汽车被列为不合格汽车的概率为 $q=C_3^3 p^2(1-p)+C_3^3 p^3+C_3^3 p(1-p)^2[1-(1-p)^2]=$
 $-3p^5+12p^4-17p^3+9p^2$ 5分
 (2)设每辆汽车质量检测的费用为 X 元,则 X 的可能取值为 60,100,
 由题意知 $P(X=100)=C_3^3 p(1-p)^2, P(X=60)=1-C_3^3 p(1-p)^2$, 7分
 所以随机变量 X 的数学期望为
 $E(X)=60 \times [1-C_3^3 p(1-p)^2]+100 \times C_3^3 p(1-p)^2=60+120p(1-p)^2$ (元), $p \in (0,1)$, 8分
 令 $f(x)=60+120x(1-x)^2, x \in (0,1)$,
 则 $f'(x)=120[(1-x)^2-2x(1-x)]=120(3x-1)(x-1)$,
 所以当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (\frac{1}{3}, 1)$ 时, $f'(x) < 0$;
 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{3}, 1)$ 上单调递减,
 所以 $f(x) \leq f(\frac{1}{3})=60+120 \times \frac{1}{3}(1-\frac{1}{3})^2 = \frac{700}{9}$, 即 $E(X) \leq \frac{700}{9}$ (元). 10分
 所以此方案的最高费用为 $1+300 \times \frac{700}{9} \times 10^{-4} = \frac{10}{3}$ (万元), 11分
 综上所述,实际费用估计不会超过预算. 12分

21. 解:(1) $f'(x)=e^{x-1}-2ax, f'(1)=1-2a$, 1分
 $\because f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线与直线 $y=-\frac{1}{3}x+2$ 垂直,
 $\therefore f'(1)=1-2a=3$, 解得 $a=-1$, 2分
 $\therefore f(x)=e^{x-1}+x^2, \therefore f(1)=2$,
 故所求切线方程为 $y-2=3(x-1)$, 即 $y=3x-1$ 4分
 (2)由 $a > 0, ax > 0$, 可知其定义域为 $(0, +\infty)$, 令 $g(x)=0$, 则 $e^{x-1}-ax^2+ax \ln(ax)=0$.
 又 $ax > 0$, 所以 $\frac{e^{x-1}}{ax}-x+\ln(ax)=\frac{e^{x-1}}{e \ln(ax)}-x+\ln(ax)=e^{x-\ln(ax)-1}-[x-\ln(ax)]=0$ 6分
 令 $t=x-\ln(ax)$, 即可转化为 $e^{t-1}-t=0$ 有解. 7分
 设 $h(t)=e^{t-1}-t$, 则由 $h'(t)=e^{t-1}-1 < 0$ 可得 $t < 1$,
 则 $h(t)$ 在 $t \in (-\infty, 1)$ 上单调递减, 在 $t \in (1, +\infty)$ 上单调递增. 8分
 又 $h(1)=0$, 所以 $h(t)=e^{t-1}-t$ 有唯一的零点 $t=1$ 9分
 若 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在零点,
 则 $1=x-\ln(ax)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有解, 整理得 $1+\ln a=x-\ln x$ 10分
 设 $l(x)=x-\ln x$,
 由 $l'(x)=1-\frac{1}{x}$, 知 $l(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单调递减, 在 $x \in (1, +\infty)$ 上单调递增,
 又当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $l(x) \rightarrow +\infty$, 则 $l(x) \geq l(1)=1$,
 所以 $1+\ln a \geq 1$, 得 $a \geq 1$,
 故实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 12分

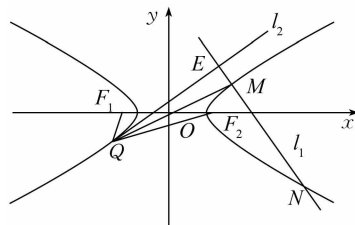
22. 解:(1)因为虚轴长为 2, 即 $2b=2$, 所以 $b=1$.
 焦距为 4, 所以 $2c=4 \Rightarrow c=2, a^2=c^2-b^2=3$,
 所以双曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 3分

(2)如图,由题意知点 Q 在双曲线左支上, 设 $M(x_0, y_0)$, 则 $Q(-x_0, -y_0)$.

易知直线 l_2 的斜率存在, 设直线 l_2 的斜率为 k ,

记 $\mathbf{a}=(1, k)$, 又 l_2 为 $\angle F_1 Q F_2$ 的平分线, 则 $\frac{\overrightarrow{QF_1} \cdot \mathbf{a}}{|\overrightarrow{QF_1}|} = \frac{\overrightarrow{QF_2} \cdot \mathbf{a}}{|\overrightarrow{QF_2}|}$.

因为 $\frac{x_0^2}{3}-y_0^2=1, x_0 \geq \sqrt{3}$,



所以 $|\overrightarrow{QF_1}| = \sqrt{(-2+x_0)^2 + y_0^2} = \sqrt{(-2+x_0)^2 + \frac{x_0^2}{3} - 1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}x_0 - \sqrt{3}$,

同理 $|\overrightarrow{QF_2}| = \frac{2\sqrt{3}}{3}x_0 + \sqrt{3}$,

又 $\overrightarrow{QF_1} = (x_0 - 2, y_0)$, $\overrightarrow{QF_2} = (x_0 + 2, y_0)$,

代入 $\frac{\overrightarrow{QF_1} \cdot \mathbf{a}}{|\overrightarrow{QF_1}|} = \frac{\overrightarrow{QF_2} \cdot \mathbf{a}}{|\overrightarrow{QF_2}|}$, 得 $\frac{(x_0 - 2, y_0) \cdot (1, k)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0 - \sqrt{3}} = \frac{(x_0 + 2, y_0) \cdot (1, k)}{\frac{2\sqrt{3}}{3}x_0 + \sqrt{3}}$,

化简得 $x_0 = 3ky_0$ 6分

又 $x_0 > 0, y_0 > 0$, 所以 $k > 0$,

将 $x_0 = 3ky_0$ 代入 $\frac{x_0^2}{3} - y_0^2 = 1, x_0 \geq \sqrt{3}$, 得 $x_0 = \frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, y_0 = \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}$,

所以 $M(\frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}), Q(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, -\frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}}), k > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 7分

设直线 l_2 的方程为 $y = kx + t$,

将 $Q(-\frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, -\frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}})$ 代入得 $t = \sqrt{3k^2 - 1}$,

所以直线 l_2 的方程为 $y = kx + \sqrt{3k^2 - 1}, k > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 8分

由点到直线的距离公式得

$|\overrightarrow{ME}| = \frac{|\frac{3k^2 - 1}{\sqrt{3k^2 - 1}} + \sqrt{3k^2 - 1}|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{3k^2 - 1}}{\sqrt{k^2 + 1}}$, 9分

又直线 MN 的斜率为 $-\frac{1}{k}$, 设直线 MN 的方程为 $x = -ky + t'$,

将 $M(\frac{3k}{\sqrt{3k^2 - 1}}, \frac{1}{\sqrt{3k^2 - 1}})$ 代入得 $t' = \frac{4k}{\sqrt{3k^2 - 1}}$,

所以直线 MN 的方程为 $x = -ky + \frac{4k}{\sqrt{3k^2 - 1}}$,

将其与 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1 (x > 0)$ 联立得 $(k^2 - 3)y^2 - \frac{8k^2}{\sqrt{3k^2 - 1}}y + \frac{7k^2 + 3}{3k^2 - 1} = 0$ 10分

设 $N(x_1, y_1)$,

则 $y_0 + y_1 = \frac{8k^2}{(k^2 - 3)\sqrt{3k^2 - 1}}, y_0 y_1 = \frac{7k^2 + 3}{(k^2 - 3)(3k^2 - 1)}$.

由 $y_0 y_1 < 0$ 得 $k^2 \in (\frac{1}{3}, 3)$,

$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1 + k^2} |y_0 - y_1| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(y_0 + y_1)^2 - 4y_0 y_1} = \frac{6(k^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{(3 - k^2)\sqrt{3k^2 - 1}}$.

故 $\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{ME}|} = \frac{3(k^2 + 1)^2}{(3 - k^2)(3k^2 - 1)} \geq \frac{3(k^2 + 1)^2}{(k^2 + 1)^2} = 3$,

当且仅当 $3 - k^2 = 3k^2 - 1$, 即 $k^2 = 1$ 时, 等号成立,

所以 $\frac{|\overrightarrow{ME}|}{|\overrightarrow{NE}|} = \frac{|\overrightarrow{ME}|}{|\overrightarrow{ME}| + |\overrightarrow{MN}|} = \frac{1}{\frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{ME}|} + 1} \leq \frac{1}{4}$, 当且仅当 $k = 1$ 时, 等号成立, 即 $\frac{|\overrightarrow{ME}|}{|\overrightarrow{NE}|}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

..... 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

