答案和解析

1.【答案】D

解：对于A：$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0$，故$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故 A 不正确；

对于B：$ac^2<bc^2$在$c=0$时，不成立，故 B 不正确；

对于C：$\frac{b}{a}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{ab}=\frac{(b-a)(b+a)}{ab}<0$，故$\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$，故 C 不正确.

故选 D.

2.【答案】B

解：因为$B\subseteq A$，则$a^2-2a-3=0$，解得$a=-1$ 或$a=3$，

若$a=-1$，则$A=\{2,3,0\}$，$C=\{2,-1\}$，此时$A\cap C=\{2\}$，符合题意；

若$a=3$，则$A=\{2,3,0\}$，$C=\{2,3\}$，此时$A\cap C=\{2,3\}$，不符合题意，

故$a=-1$.

故选 B.

3.【答案】B

解：$x^2-x<0\Leftrightarrow 0<x<1$，运用集合的知识易知，

A中 $0<x<1$ 是p的充要条件；

B中$-1<x<1$ 是p的必要条件；

C中$\frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}$是$p$的充分条件；

D中$\frac{1}{2}<x<2$ 是p的既不充分也不必要条件.

故选 B.

4.【答案】D

解：$2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 对一切实数x都成立，

①$k=0$ 时，$-\frac{3}{8}<0$ 恒成立，

②$k\neq 0$ 时，$\begin{cases}k<0\\ \Delta=k^2+3k<0\end{cases}$，

解可得，$-3<k<0$

综上可得，$-3<k\leq 0$

故选 D.

5.【答案】B

解：因为 $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(4a+b)=4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}+1\geq 5+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=9$，

又 $4a+b=2$，当且仅当 $a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3}$ 时取 "="，

所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant\frac{9}{2}$，

故选 B.

6.【答案】D

解：$a=3^{0.7}$，$b=(\frac{1}{3})^{-0.8}=3^{0.8}$，

由函数$y=3^x$是R上的增函数，$0.8>0.7>0$，

则$3^{0.8}>3^{0.7}>3^0$，即$b>a>1$，

由函数$y=\log_{0.7}x$是R上的减函数，$0.8>0.7$，

则$\log_{0.7}0.8<\log_{0.7}0.7=1$，

$\therefore c<a<b$，

故选：D.

7.【答案】D

解：$f(x)=(3^{-x}-3^x)\cdot\frac{1}{x^4+1}$，其定义域为$R$，关于原点对称，

则$f(-x)=(3^x-3^{-x})\cdot\frac{1}{x^4+1}=-(3^{-x}-3^x)\cdot\frac{1}{x^4+1}=-f(x)$，

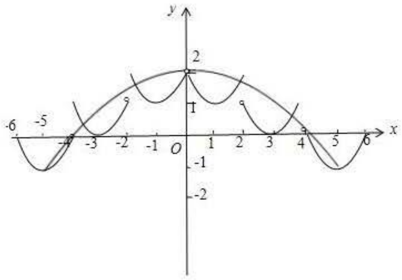
则$f(x)$是奇函数，图象关于原点对称，排除A，C，

$f(1)<0$，排除B，

故选 D.

8.【答案】D

解：方程$f(x)+\frac{1}{8}x^2=2$根的个数⇔函数$y=f(x)$与函数$y=-\frac{1}{8}x^2+2$的图象交点个数，图象如下：



由图象可知两函数图象有 6 个交点.

故选：D.

9.【答案】ACD

解：由题意，根据基本不等式可知 $2a+b=ab\geqslant 2\sqrt{2ab}$，则$ab\geqslant 8$，

当且仅当$a=2$，$b=4$时，等号成立，故A正确；

因为$a>0$，$b>0$，$2a+b=ab$变形得$\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$，

所以$a+b=(a+b)(\frac{2}{b}+\frac{1}{a})=\frac{2a}{b}+2+1+\frac{b}{a}\geqslant 3+2\sqrt{2}$,

当且仅当$\frac{2a}{b}=\frac{b}{a}$，即$b=2+\sqrt{2}$，$a=\sqrt{2}+1$时，等号成立，

所以$a+b\geqslant 3+2\sqrt{2}$，故B错误；

由$\frac{2}{b}+\frac{1}{a}=1$，$a>0$，$b>0$，所以$0<\frac{2}{b}=1-\frac{1}{a}<1$，即$b>2$，故$C$正确；

由 $2a+b=ab$，可得$(a-1)(b-2)=2>0$，

根据前面分析得$b>2$，即$b-2>0$，所以$a-1>0$，即$a>1$，故D正确.

故选：ACD.

10.【答案】BD

解：对于A，若$m-2<x<m+2$是$1<x<3$的必要不充分条件，

则$\begin{cases}m-2\leqslant 1\\3\leqslant m+2\end{cases}$且等号不同时成立，解得$1\leqslant m\leqslant 3$，故$A$错误；

对于B，当$a>b$，$c=0$时，不能推得$ac^2>bc^2$，

反之，若$ac^2>bc^2$，则$c^2>0$，能推得$a>b$，

所以，“$a>b$”是“$ac^2>bc^2$”的必要不充分条件，故B正确；

对于C，$\exists x\in[\frac{1}{2},3]$，使不等式$x^2-ax+1\geqslant 0$成立，

即$a\leqslant(x+\frac{1}{x})_{\max}$，$x\in[\frac{1}{2},3]$，

因为对勾函数$f(x)=x+\frac{1}{x}$在$[\frac{1}{2},1]$上单调递减，在$[1,3]$上单调递增，

$f(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}<f(3)=\frac{10}{3}$,

所以$(x+\frac{1}{x})_{\max}=\frac{10}{3}$，所以$a\leqslant\frac{10}{3}$，故$C$错误；

对于D，$a>1$能推得$\frac{1}{a}<1$，

反之，$\frac{1}{a}<1$不能推得$a>1$，如$a=-1$，

所以“$a>1$”是“$\frac{1}{a}<1$”的充分不必要条件，故D正确.

故选BD.

11.【答案】ABD

解：由题意可知，$f(x)$图象的对称中心为$(0,0)$，对称轴为$x=1$，

所以$f(x)$也关于直线$x=-1$对称，且$f(2-x)=f(x)$，故A、D正确；

因为$f(x)=f(2-x)=-f(-x)$，故$f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，

所以$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以$f(x)$的周期为4，

则$g(2023)=f(2024)=f(0)=0$，故B正确;

但只能说4是$f(x)$的周期，不能确实是其最小正周期，故C错误;

故选ABD.

12.【答案】AC

解：对于A，函数$f(x)$的定义域为$[0,2]$，$0\leq 2x\leq 2$，则函数$f(2x)$的定义域为$[0,1]$，故A正确;

对于B，$y=(\frac{1}{2})^{-x^2+1}$，因为$-x^2+1\leq 1$，所以$(\frac{1}{2})^{-x^2+1}\geq\frac{1}{2}$，所以当$x=0$时函数取得的最小值为$\frac{1}{2}$，故$B$不正确;

对于C，因为$y=-\frac{1}{x}$的对称中心$(0,0)$，将函数$y=-\frac{1}{x}$的图象向左平移2个单位，

向上平移1个单位得到$y=\frac{x+1}{x+2}=1-\frac{1}{x+2}$，对称中心为$(-2,1)$，故$C$正确；

对于D，$y=x^2-4x-5$为开口向上的二次函数，且$x^2-4x-5>0$时，解得$x<-1$或$x>5$，

函数$f(x)=\log_2(x^2-4x-5)$的减区间是$(-\infty,-1)$，故D错误；

故选AC.

13.【答案】4

解：原式$=\frac{1}{3}\lg2^3-1+(3^3)^{\frac{1}{3}}+\lg50$

$$=\lg2-1+3+\lg50$$

$=\lg100+2=2\lg10+2=4$.

故答案为：4.

14.【答案】$[-\frac{11}{3},1]$

解：由$-1\le a+b\le 1$，$1\le a-2b\le 3$，

设$a+3b=m(a+b)+n(a-2b)$

$=(m+n)a+(m-2n)b$，

$\therefore\begin{cases}m+n=1\\m-2n=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=\frac{5}{3}\\n=-\frac{2}{3}\end{cases}$.

$\therefore-\frac{5}{3}\le\frac{5}{3}(a+b)\le\frac{5}{3}$，$-2\le-\frac{2}{3}(a-2b)\le-\frac{2}{3}$，

$$\therefore-\frac{11}{3}\le a+3b\le 1.$$

$\therefore a+3b$的取值范围是$[-\frac{11}{3},1]$，

故答案为$[-\frac{11}{3},1]$.

15.【答案】$\{a|a<6\text{ 或}a>9\}$

解：已知集合$A=\{x|2a+1\leqslant x\leqslant 3a-5\},B=\{x|x<0\text{ 或}x>19\}$.

若$A\subseteq(A\cap B)$，则$A\subseteq B$，

当$2a+1>3a-5$，即$a<6$时，$A=\varnothing$满足条件；

当$2a+1\leqslant 3a-5$，即$a\geqslant 6$时，若$A\subseteq B$，则$2a+1>19$或$3a-5<0$，

得$a>9$ 或$a<\frac{5}{3}$(舍)；

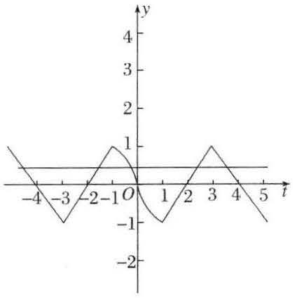
综上，实数a的取值范围是$\{a|a<6\text{ 或}a>9\}$，

故答案为：$\{a|a<6\text{ 或}a>9\}$.

16.【答案】$\frac{1}{1-2\pi}$

解：当$x\geq 0$时，$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+1}-2,x\in[0,1),\\x-2,x\in[1,3),\\4-x,x\in[3,+\infty),\end{cases}$

根据奇函数关于原点对称，作出函数$f(x)$在R上的图象如图所示，



设函数$y=f(x)$的图象与$y=\frac{1}{\pi}$交点的横坐标从左到右依次为x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，

由图象的对称性可知，$x_1+x_2=-6$，$x_4+x_5=6$，$x_1+x_2+x_4+x_5=0$，

当$x\in(-1,0]$时，$-x\in[0,1)$，则$f(x)=-f(-x)=-\frac{2x}{1-x}$，

令$-\frac{2x}{1-x}=\frac{1}{\pi}$，解得$x_3=\frac{1}{1-2\pi}$，

所以函数$F(x)=f(x)-\frac{1}{\pi}$的所有零点之和为$\frac{1}{1-2\pi}$.

故答案为：$\frac{1}{1-2\pi}$.

17.【答案】解：(1)由 $2a\cos A=-\sqrt{3}(c\cos B+b\cos C)$及正弦定理得，

$2\sin A\cos A=-\sqrt{3}(\sin C\cos B+\sin B\cos C)=-\sqrt{3}\sin(B+C)=-\sqrt{3}\sin A$，

又 $\sin A>0$，$\therefore\cos A=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

又$\because 0<A<\pi$，$\therefore A=\frac{5\pi}{6}$.

(2) $\because\Delta ABC$的面积为$\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}bc\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{c}{2}$，$\therefore c=\sqrt{3}$，

由余弦定理得$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{5\pi}{6}=b^2+c^2+\sqrt{3}bc=4+3+6=13$，

$\therefore a=\sqrt{13}$.

18.【答案】解：(1)若选①，因为$a_nb_{n+1}=nb_n-b_{n+1}$,

当n=1 时，$a_1b_2=b_1-b_2,b_1=1,b_2=\frac{1}{3}$,所以$a_1=2$

又因为$a_2+a_3=a_5-b_1$，所以$d=3$，

$a_n=3n-1$；

若选 ②:因为$a_nb_{n+1}=nb_n-b_{n+1}$,

当$n=1$时，$a_1b_2=b_1-b_2, b_1=1, b_2=\frac{1}{3}$,所以$a_1=2$.

$\because a_2\cdot a_3=2a_7$，$\therefore (a_1+d)(a_1+2d)=2(a_1+6d)(d>0)$，$\therefore d=3$，

$\therefore a_n=3n-1$.

若选 ③:因为$a_nb_{n+1}=nb_n-b_{n+1}$,

当$n=1$时，$a_1b_2=b_1-b_2, b_1=1, b_2=\frac{1}{3}$,所以$a_1=2$.

$\because S_3=15$，$\therefore 3a_1+\frac{3\times 2}{2}d=15$，$\therefore d=3$，$\therefore a_n=3n-1$.

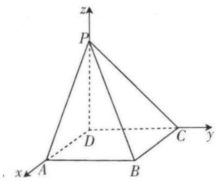
(2)由(1)知$(3n-1)b_{n+1}=nb_n-b_{n+1}$, 即$3nb_{n+1}=nb_n, b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n$,

所以$\{b_n\}$是首项为 1，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列，

所以$S_n=\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2\times 3^{n-1}}$.

19.【答案】解：(1)由条件可知DA、DC、DP两两垂直，如图，

以$\overrightarrow{DA}$、$\overrightarrow{DC}$、$\overrightarrow{DP}$为x，y，z轴的正方向建立空间直角坐标系$D-xyz$.



设$DC=1$，则$D(0,0,0)$，$A(1,0,0)$，$B(1,1,0)$，$C(0,1,0)$，$P(0,0,1)$.

$\therefore \overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PA}=(1,0,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，

设平面PAC的一个法向量为$\vec{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$,

则$\begin{cases}x-z=0\\ y-z=0\end{cases}$,

令$x=1$，则$y=1$，$z=1$，

$\therefore$平面PAC的一个法向量为$\vec{n}=(1,1,1)$，

$\therefore \cos<\overrightarrow{PB}, \vec{n}>=\frac{1}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$,

即所求角的正弦值为$\frac{1}{3}$.

(2)由$\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(0,1,-1)$，

设平面PBC的一个法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$,

则$\begin{cases}x_1+y_1-z_1=0\\ y_1-z_1=0\end{cases}$,

令$x_1=0$，则$y_1=1$，$z_1=1$，

得平面PBC的一个法向量为$\vec{m}=(0,1,1)$，

$\therefore \cos<\vec{m}, \vec{n}>=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,

又二面角$A-\mathrm{PC}-B$的平面角为锐角，

所以所求二面角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

20.【答案】解：(1)设“这局比赛甲以先得 11 分获胜”为事件A，

“甲乙再打 3 个球，甲先得 11 分获胜”为事件B，

“甲乙再打 4 个球，甲先得 11 分获胜”为事件C，

则事件A中包含事件B和事件C，且事件B和事件C互斥.

事件B即为甲乙再打 3 个球，这 3 个球均为甲胜，

则$P(B)=C_3^3(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$,

事件C即为甲乙再打 4 个球，则前三个球甲赢 2 个，最后 1 个球甲赢，

则$P(C)=C_3^2(\frac{2}{3})^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$,

所以$P(A)=P(B)+P(C)=\frac{8}{27}+\frac{8}{27}=\frac{16}{27}$.

(2)X的可能取值为 1、2、3、4，则

$P(X=1)=\frac{3}{4}$,

$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16}$,

$P(X=3)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{64}$,

$P(X=4)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$,

所以X的分布列为：

X	1	2	3	4
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$	$\frac{1}{64}$

故X的数学期望$E(X)=1\times\frac{3}{4}+2\times\frac{3}{16}+3\times\frac{3}{64}+4\times\frac{1}{64}=\frac{85}{64}$.

21.【答案】解：(1)易知$a=1$，由$\frac{c}{a}=2$，得$c=2$，$\therefore b^2=c^2-a^2=3$.

设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，直线l：$x=my+2$，

由$\begin{cases}x=my+2,\\ x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$消去$x$，得$(3m^2-1)y^2+12my+9=0$，

则 $y_1+y_2=\frac{-12m}{3m^2-1}$， $y_1y_2=\frac{9}{3m^2-1}$.

$S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}|BF|\cdot|y_1-y_2|=\frac{1}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(-12m)^2}{(3m^2-1)^2}-\frac{4\times9}{(3m^2-1)}}=\frac{3\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}$.

$\because S_{\triangle BPQ}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore\frac{3\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

整理得 $9m^4-8m^2-1=0$.

解得$m^2=1$ 或 $m^2=-\frac{1}{9}$(舍去)，

$\therefore$直线l：$x\pm y-2=0$.

(2)设AM，BN与y轴分别交于S，T，$A(-1,0)$，$B(1,0)$.

设$S(0,y_0)$，$\therefore T(0,3y_0)$，$\therefore k_{AM}=k_{AS}=\frac{y_0}{1}=y_0$，$k_{BN}=k_{BT}=-3y_0$，$\therefore k_{BN}=-3k_{AM}$.

设$M(x_3,y_3)$，$x_3^2-\frac{y_3^2}{3}=1$,

则 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_3}{x_3+1}\cdot\frac{y_3}{x_3-1}=\frac{y_3^2}{x_3^2-1}=3$，

$\therefore k_{BN}\cdot k_{BM}=\frac{3}{k_{MA}}\cdot k_{BN}=-9$.

设直线MN的方程为$x=my+t$，$N(x_4,y_4)$，

$\begin{cases}x=my+t,\\ 3x^2-y^2=3,\end{cases}$

$3(m^2y^2+2mty+t^2)-y^2=3$，

$\therefore (3m^2-1)y^2+6mty+3t^2-3=0$，

则$\begin{cases}3m^2-1\neq 0\\ \Delta=36m^2t^2-4(3m^2-1)(3t^2-3)>0\end{cases}$，

$\therefore y_3+y_4=-\frac{6mt}{3m^2-1}$，　$y_3y_4=\frac{3t^2-3}{3m^2-1}$，

$\therefore k_{BM}\cdot k_{BN}=\frac{y_3}{x_3-1}\cdot\frac{y_4}{x_4-1}=\frac{y_3y_4}{(my_3+t-1)(my_4+t-1)}=-9$，

$9[m^2y_3y_4+m(t-1)(y_3+y_4)+(t-1)^2]+y_3y_4=0$，

$\therefore (9m^2+1)y_3y_4+9m(t-1)(y_3+y_4)+9(t-1)^2=0$，

$\therefore (9m^2+1)\cdot\frac{3t^2-3}{3m^2-1}+9m(t-1)\cdot\frac{-6mt}{3m^2-1}+9(t-1)^2=0$，

$\because$直线MN不过$B(1,0)$，$\therefore t\neq 1$，

$\therefore (9m^2+1)(t+1)-18m^2t+3(t-1)(3m^2-1)=0$，

$\therefore 9m^2t+9m^2+t+1-18m^2t+9m^2t-3t-9m^2+3=0$，得$t=2$，

$\therefore$直线MN过定点$(2,0)$.

22.【答案】解：(1)因为$f(x)=\frac{1}{2}ax^2-lnx$定义域为$(0,+\infty)$，

所以$f'(x)=ax-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-1}{x}$,

当$a=1$时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-lnx$，$f'(x)=\frac{x^2-1}{x}$,

令$f'(x)=0$，得$x=1$，$x=-1$(舍去)，

当$0<x<1$时，$f'(x)<0$，当$x>1$时，$f'(x)>0$，

所以$f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)$的极小值为$f(1)=\frac{1}{2}$，无极大值.

(2)因为$f'(x)=ax-\frac{1}{x}=\frac{ax^2-1}{x}$,

①若$a\geq 1$，当$x\in[1,2]$时，$f'(x)\geq 0$恒成立，所以$f(x)$在$[1,2]$上单调递增，

要使方程$f(x)=1$在$[1,2]$上有解，则$\begin{cases}f(1)\leq 1\\ f(2)\geq 1\end{cases}$，解得$\frac{1+ln2}{2}\leq a\leq 2$，

因为$\frac{1+ln2}{2}<1$，所以$1\leq a\leq 2$；

②若$a\leq\frac{1}{4}$，当$x\in[1,2]$时，$f'(x)\leq 0$恒成立，所以$f(x)$在$[1,2]$上单调递减，此时$f(x)\leq f(1)=\frac{a}{2}\leq\frac{1}{8}$，

不符合条件；

③若$\frac{1}{4} < a < 1$，当$1 \le x < \sqrt{\frac{1}{a}}$时，$f'(x) < 0$，当$\sqrt{\frac{1}{a}} < x \le 2$时，$f'(x) > 0$，

所以$f(x)$在$[1,\sqrt{\frac{1}{a}})$上单调递减，在$[\sqrt{\frac{1}{a}},2]$上单调递增，

此时$f(1) = \frac{a}{2} < \frac{1}{2}$，$f(\sqrt{\frac{1}{a}}) < f(1) < \frac{1}{2}$，要使方程$f(x) =$在$[1,2]$上有解，

则需$f(2) = 2a - ln2 \ge 1$，解得$a \ge \frac{1+ln2}{2}$，所以$\frac{1+ln2}{2} \le a < 1$，

综上可知，a的取值范围为$[\frac{1+ln2}{2},2]$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。