

湘豫名校联考 2023年2月高三春季入学摸底考试 数学(文科)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	B	A	C	D	A	D	D	A

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. C 【解析】由题意,得全集 $U = \{x | x > 1\}$, 集合 $A = \{x | x > 2\}$. 根据补集的定义,得 $\complement_U A = \{x | 1 < x \leq 2\} = (1, 2]$. 故选 C.

2. D 【解析】根据题意,得 $z = \frac{2+i}{4-3i} = \frac{(2+i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{5+10i}{25} = \frac{1+2i}{5}$, 所以 $\bar{z} = \frac{1-2i}{5}$. 所以 \bar{z} 在复平面内对应的点为 $(\frac{1}{5}, -\frac{2}{5})$, 位于第四象限. 故选 D. 来源:高三答案公众号

3. C 【解析】根据题意,得 $\begin{cases} M=50, \\ M \cdot e^{10a} = 200, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} M=50, \\ e^{10a} = 4. \end{cases}$ 故 $F(x) = 50 \times 4^{\frac{x}{10}}$. 当 $x=30$ 时, $F(30) = 50 \times 4^3 = 3200$. 故选 C.

4. B 【解析】设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q . 因为 $a_5 a_{10} = a_6 a_9 = 8a_8$, 且由题可得 $a_8 \neq 0$, 所以 $a_6 = 8$. 所以 $\frac{a_6}{a_3} = q^3 = 8$, 解得 $q=2$. 所以 $a_1 = \frac{a_3}{q^2} = \frac{1}{4}$. 所以 $S_5 = \frac{\frac{1}{4}(1-2^5)}{1-2} = \frac{31}{4}$. 故选 B.

5. B 【解析】输入 $k=1$, 第一次循环, $1^2 < 1+10$, $k=1+1=2$, $n=0+1=1$; 第二次循环, $2^2 < 2+10$, $k=2+1=3$, $n=1+1=2$; 第三次循环, $3^2 < 3+10$, $k=3+1=4$, $n=2+1=3$; 第四次循环, $4^2 > 4+10$, 结束循环, 此时 $k=4$, $n=3$. 所以输出 $n=3$. 故选 B.

6. A 【解析】由题图可知,函数的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 排除 C; 函数 $f(x) = x \ln|x|$ 是奇函数, 排除 B; 当 $0 < x < 1$ 时, $x-1 < 0$, $e^x > 0$, 所以 $f(x) = (x-1)e^x < 0$, 排除 D. 故选 A.

7. C 【解析】根据题意, $f(x) = \sqrt{5} \sin(x+\varphi) \left(\cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5} \right)$. 因为 $\exists \theta \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \leq f(\theta)$, 所以 $f(\theta) = f(x)_{\max} = \sqrt{5}$. 所以 $\theta + \varphi = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$. 所以 $\cos \theta = \sin \varphi, \sin \theta = \cos \varphi$, 所以 $\tan \theta = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = 2$. 故 $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = -\frac{4}{3}$. 故选 C.

8. D 【解析】设 AB 的中点为 M , CD 的中点为 N , 圆 O 的半径为 r . 由题可得 $r = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 则 $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) \cdot (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}) = 4 \overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 4(\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{ON}) = 4(\overrightarrow{PO}^2 - \overrightarrow{OM}^2) = 4 \times \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) = 4$. 故选 D.

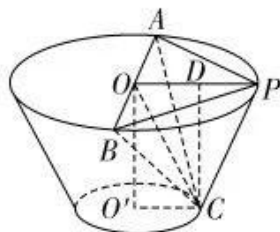
9. A 【解析】因为 $|AB| = \frac{\sqrt{3}}{2} |F_1 F_2| = \sqrt{3}c$, 所以 $|OA| = \frac{\sqrt{3}c}{2}$. 因为 $k_{AB} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $\angle AOF_1 = 30^\circ$. 所以 $\cos \angle AOF_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 根据余弦定理, 得 $|AF_1| = \sqrt{|OA|^2 + |OF_1|^2 - 2|OA| \cdot |OF_1| \cos \angle AOF_1} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2 + c^2 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c} = \frac{1}{2}c$, $|AF_2| = \sqrt{|OA|^2 + |OF_2|^2 - 2|OA| \cdot |OF_2| \cos \angle AOF_2} = \sqrt{\frac{3}{4}c^2 + c^2 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}c \times \frac{\sqrt{3}}{2}c} = \frac{\sqrt{13}}{2}c$. 所以

$|AF_2| - |AF_1| = \frac{\sqrt{13}}{2}c - \frac{1}{2}c = 2a$. 故双曲线的离心率为 $e = \frac{4}{\sqrt{13}-1} = \frac{\sqrt{13}+1}{3}$. 故选 A.

10. D 【解析】把函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $g(x) = A\cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = A\cos\left(2x - \frac{\pi}{3} + \varphi\right)$ 的图象. 因为 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $-\frac{\pi}{3} + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 即 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$. 又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = \frac{\pi}{3}$. 因为 $f(x) = A\cos(2x + \varphi) (|\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{2} = \pi$, 所以 $f\left(\frac{T}{8}\right) = f\left(\frac{\pi}{8}\right) = A\cos\left(2 \times \frac{\pi}{8} + \varphi\right) = \sqrt{2} - \sqrt{6}$, 即 $A\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} - \sqrt{6}$, 解得 $A = 4$. 所以 $f(x) = 4\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\left[2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = 4\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3}$. 故选 D.

11. D 【解析】方法一: 由题可得 $AB = 8$. 因为 $AP = BP$, 所以 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$. 过点 A 向下底面作垂线, 垂足为 A_1 , 根据圆的性质, 得 $CA_1 = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. 因为圆台的高 $h = 4$, 所以 $CA = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{5})^2} = 6$, $V_{C-ABP} = \frac{1}{3} \times 16 \times 4 = \frac{64}{3}$. 因为 $AC = BC = 6$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 8 \times \sqrt{36 - 16} = 8\sqrt{5}$. 设点 P 到平面 ABC 的距离为 d , 则 $V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \times 8\sqrt{5}d = \frac{64}{3}$, 解得 $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

方法二: 如图, 过点 C 作上底面的垂线交上底面于点 D, 设上下底面的圆心分别为 O, O' . 易得 O, D, P 三点在同一条直线上. 因为 $AB \perp OO', AB \perp OP, OO' \cap OP = O$, 所以 $AB \perp$ 平面 $POO'C$, 所以 $AB \perp OC$. 因为在 $Rt\triangle OO'C$ 中, $OC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, 所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OC = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$. 设点 P 到平面 ABC 的距离为 d , 因为 $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OP = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16, V_{P-ABC} = V_{C-ABP}$, 所以 $\frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot d = 16$.

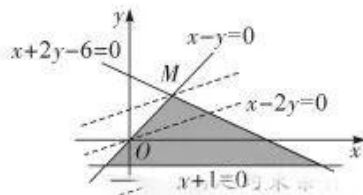


$OO' = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot d$, 即 $\frac{1}{3} \times 16 \times 4 = \frac{1}{3} \times 8\sqrt{5} \times d$, 所以 $d = \frac{8\sqrt{5}}{5}$. 故选 D.

12. A 【解析】由数形结合可得, 过点 $(2, b)$ 不可能作曲线 $y = 2e^x$ 的切线, 则 $b > 2e^2$. 对于满足此条件的任意的 b , 函数 $f(x) = \frac{a^x}{\ln a} - \frac{b}{2}x^2 + e^2x + 1 (a > 1)$ 恒有两个不同的极值点等价于 $f'(x) = a^x - bx + e^2 (a > 1)$ 恒有两个不同的变号零点, 等价于方程 $e^{x \ln a} - bx + e^2 = 0$ 有两个不同的解. 令 $t = x \ln a$, 则 $e^t - \frac{bt}{\ln a} + e^2 = 0 \Rightarrow \frac{b}{\ln a} = \frac{e^t + e^2}{t}, t > 0$, 即直线 $y = \frac{b}{\ln a}$ 与函数 $y = \frac{e^t + e^2}{t}$ 的图象有两个不同的交点. 记 $g(t) = \frac{e^t + e^2}{t}$, 则 $g'(t) = \frac{e^t \cdot t - (e^t + e^2)}{t^2} = \frac{e^t(t-1) - e^2}{t^2}$. 记 $h(t) = e^t(t-1) - e^2$, 则 $h'(t) = e^t(t-1) + e^t \cdot 1 = e^t \cdot t > 0$, 所以 $h(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 令 $h(t) = 0$, 得 $t = 2$. 当 $t \in (0, 2)$ 时, $h(t) < 0$, 当 $t \in (2, +\infty)$ 时, $h(t) > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(0, 2)$ 上单调递减, $(2, +\infty)$ 上单调递增. 因为 t 趋近于 0, 和 t 趋近于正无穷时, $g(t)$ 均趋近于正无穷, 所以 $\frac{b}{\ln a} > g(2) = e^2$. 所以 $\ln a < \frac{b}{e^2}$. 因为 $b > 2e^2$, 所以 $\frac{b}{e^2} > 2$, 所以 $\ln a \leq 2 \Rightarrow 1 < a \leq e^2$. 即实数 a 的取值范围是 $(1, e^2]$. 故选 A.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. -2 【解析】画出 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y-6 \leq 0, \\ x-y \geq 0, \\ y+1 \geq 0 \end{cases}$ 表示的可行域, 如图



阴影部分所示,目标函数 $z=x-2y$,即直线 $y=\frac{x}{2}-\frac{z}{2}$,平移直线可知,当直线 $y=\frac{x}{2}-\frac{z}{2}$ 经过点 M 时,

$z=x-2y$ 取得最小值,联立 $\begin{cases} x+2y-6=0, \\ x-y=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=2, \\ y=2, \end{cases}$ 则点 $M(2,2)$,所以 $z_{\min}=2-2\times 2=-2$.

14. $\sqrt{21}$ 【解析】设准线与 y 轴交于点 M ,则 $|FM|=2$.由抛物线定义可得 $|PF|=|PA|$,又 $|PF|=|AF|$,所以 $\triangle PAF$ 是等边三角形.所以 $\angle FAM=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.所以 $|AF|=2|FM|=4$.所以 $|PA|=4$.因为准线 l 的方程是 $y=-1$,所以点 P 的纵坐标为 3.代入 $x^2=4y$ 中,得 $x^2=12$,解得 $x=\pm 2\sqrt{3}$.所以点 $P(-2\sqrt{3},3)$ 或 $P(2\sqrt{3},3)$.所以 $|OP|=\sqrt{12+3^2}=\sqrt{21}$.

15. $\frac{2n}{n+1}$ 【解析】由题可知,数列 $\{a_{n+1}-a_n\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 是以 $a_2-a_1=1$ 为首项,1 为公差的等差数列,所以 $a_{n+1}-a_n=1+(n-1)\times 1=n (n \in \mathbf{N}^*)$.所以 $(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\dots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a_1=1+2+\dots+n$.所以 $a_{n+1}-a_1=\frac{n(n+1)}{2}$.所以 $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+2$.故 $b_n=\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}+2-2}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$,

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$.

16. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ 【解析】设点 $P(x,y)$,因为 $\frac{|PA|}{|PB|}=2$,所以 $\frac{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=2$,整理可得 $\left(x-\frac{5}{3}\right)^2+y^2=\frac{16}{9}$.所以

以动点 P 的轨迹是以 $\left(\frac{5}{3},0\right)$ 为圆心, $\frac{4}{3}$ 为半径的圆.设该圆的圆心为点 M .显然,点 A,C 在圆 M 的外部.

当直线 AP 与圆 M 相切时, $\angle PAC$ 取得最大值或最小值,此时 $\sin \angle PAB=\frac{|MP|}{|MA|}=\frac{1}{2}$,所以 $\angle PAB=\frac{\pi}{6}$.

所以 $\angle PAC$ 的最大值为 $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$.故 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4}-\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.【解析】(1)因为在 $\triangle ABC$ 中, $a \sin B=\frac{3\sqrt{3}}{2}, b \cos A=\frac{1}{2}$,

所以 $a \sin B=3\sqrt{3} b \cos A$.由正弦定理得 $\sin A \sin B=3\sqrt{3} \sin B \cos A$ 2 分

因为 $\sin B>0$,所以 $\sin A=3\sqrt{3} \cos A$,所以 $\tan A=3\sqrt{3}$ 4 分

(2)因为 $\tan A=3\sqrt{3}$,所以 $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\sin A=\frac{3\sqrt{21}}{14}, \cos A=\frac{\sqrt{7}}{14}$ 6 分

又 $b \cos A=\frac{1}{2}$,所以 $b=\sqrt{7}$ 8 分

因为 $a=3$,根据余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc \cos A$,所以 $3^2=(\sqrt{7})^2+c^2-2 \times \sqrt{7} c \times \frac{\sqrt{7}}{14}$,

解得 $c=2$ (负值舍去). 10 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{2} b c \sin A=\frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times 2 \times \frac{3\sqrt{21}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 12 分

18.【解析】(1)根据公式,得

$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{100 \times (20 \times 10-60 \times 10)^2}{80 \times 20 \times 70 \times 30}$ 2 分

$\approx 4.762 > 3.841$ 3 分

故有 95% 的把握认为到店人员是否购买与年龄有关. 4 分

(2) 现从购买组的人中按分层抽样方法(各层按比例分配)抽取 6 人, 其中 60 岁以下的人数为 $6 \times \frac{20}{30} = 4$,
 分别设为 a, b, c, d ; 60 岁及以上的人数为 $6 \times \frac{10}{30} = 2$, 分别设为 A, B , 6 分
 从这 6 人中随机抽取 2 人的所有可能的结果为 $(a, b), (a, c), (a, d), (a, A), (a, B), (b, c), (b, d), (b, A), (b, B), (c, d), (c, A), (c, B), (d, A), (d, B), (A, B)$, 共 15 种, 8 分
 其中 2 人全部为 60 岁以下的结果有 $(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (c, d)$, 共 6 种, 10 分
 所以这 2 人全部为 60 岁以下的概率为 $P = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$ 12 分

19. 【解析】(1) 方法一: 存在, 且 $\lambda = \frac{1}{4}$, 理由如下:

因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AB = AD$, BD 与 AC 互相垂直且平分.
 因为 $\angle ADC = 120^\circ$, 所以 $\angle BAD = 60^\circ$. 所以三角形 ABD 是等边三角形.
 因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $ED \perp AC$, $ED \perp BD$.
 因为 $ED \cap BD = D$, $ED \subset$ 平面 $BDEF$, $BD \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$.
 又 $EM \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp EM$ 2 分
 过点 F 作 $FG \perp DE$ 于点 G , 易得四边形 $BDGF$ 为矩形.

设 $AB = ED = \frac{1}{\lambda} FB = 2a$, 则 $BD = FG = 2a$, $BM = DM = \frac{1}{2} BD = a$.
 因为 $FB \parallel ED$, 所以 $FB \perp BD$. 所以 $EM^2 = DE^2 + DM^2 = 5a^2$, $EF^2 = GF^2 + GE^2 = 4a^2 + (2a - 2\lambda a)^2$, $FM^2 = BF^2 + BM^2 = a^2 + 4\lambda^2 a^2$ 4 分

欲使 $EM \perp$ 平面 AFC , 只需 $EM \perp MF$ 5 分

即 $EM^2 + FM^2 = EF^2$, 所以 $5a^2 + a^2 + 4\lambda^2 a^2 = 4a^2 + (2a - 2\lambda a)^2$, 解得 $\lambda = \frac{1}{4}$.

所以存在实数 λ , 使得 $EM \perp$ 平面 AFC , 且 $\lambda = \frac{1}{4}$ 6 分

方法二: 存在, 且 $\lambda = \frac{1}{4}$, 理由如下:

若 $EM \perp$ 平面 AFC , 又 $MFC \subset$ 平面 AFC ,
 所以 $EM \perp MF$, 即 $\angle DME + \angle BMF = \frac{\pi}{2}$ 1 分

因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FB \parallel ED$, 所以 $FB \perp$ 平面 $ABCD$.
 因为 $BD \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $ED \perp BD$, $FB \perp BD$.

所以 $\angle MFB + \angle BMF = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\angle MFB = \angle DME$ 3 分

所以 $Rt\triangle MFB \sim Rt\triangle EMD$,

故 $\frac{DM}{BF} = \frac{DE}{BM}$, 即 $DM \cdot BM = BF \cdot DE = \lambda DE^2$ 4 分

在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ADM = 60^\circ$, 所以 $DM = BM = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} DE$.

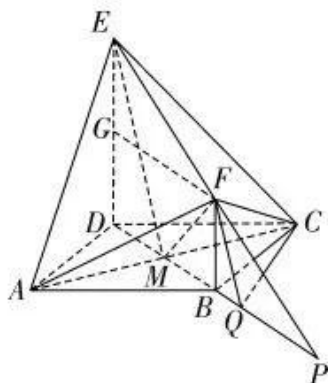
所以 $\lambda = \frac{DM^2}{DE^2} = \frac{1}{4}$.

因为四边形 $ABCD$ 为菱形, 所以 $AB = AD$, BD 与 AC 互相垂直且平分.
 因为 $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $AC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $ED \perp AC$.
 因为 $ED \cap BD = D$, $ED \subset$ 平面 $BDEF$, $BD \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp$ 平面 $BDEF$.
 又 $EM \subset$ 平面 $BDEF$, 所以 $AC \perp EM$.



因此, $\lambda = \frac{1}{4}$ 时, $EM \perp$ 平面 AFC 6分

(2) 设 $AB = ED = 2FB = 2a$, 因为 $FB \parallel ED$, 所以 E, F, B, D 四点共面. 因为 $BF = \frac{1}{2}DE$, 所以 $BF < DE$. 分别延长 EF 与 DB 相交于点 P , 取 PM 的中点 Q , 连接 FQ, CQ .



因为 $FB = \frac{1}{2}ED$, 所以点 F 为 EP 的中点. 7分

所以 $FQ \parallel EM, FQ = \frac{1}{2}EM = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

故 $\angle CFQ$ (或其补角) 为异面直线 EM 与 FC 所成的角. 9分

因为 $FC = \sqrt{BF^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a, BQ = \sqrt{FQ^2 - FB^2} = \frac{1}{2}a$,

所以根据余弦定理, 得

$$CQ^2 = BQ^2 + BC^2 - 2BQ \cdot BC \cos 120^\circ = \frac{1}{4}a^2 + 4a^2 + 2 \times \frac{1}{2}a \times 2a \times \frac{1}{2} = \frac{21a^2}{4}. \dots\dots\dots 10分$$

$$\text{所以 } \cos \angle CFQ = \frac{FC^2 + FQ^2 - CQ^2}{2FC \cdot FQ} = \frac{5a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{21}{4}a^2}{2\sqrt{5}a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{1}{5}. \dots\dots\dots 11分$$

故异面直线 EM 与 FC 所成角的余弦值为 $\frac{1}{5}$ 12分

20. 【解析】(1) 因为 $\triangle QF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{6}$,

$$\text{所以 } \frac{1}{2} \times 2c \times 1 = \sqrt{6}, \text{ 解得 } c = \sqrt{6}. \dots\dots\dots 1分$$

$$\text{因为 } \overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = -1, \overrightarrow{QF_1} = (-c - x_0, -1), \overrightarrow{QF_2} = (c - x_0, -1),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{QF_1} \cdot \overrightarrow{QF_2} = (-c - x_0, -1) \cdot (c - x_0, -1) = x_0^2 - c^2 + 1 = x_0^2 - (\sqrt{6})^2 + 1 = -1, \text{ 解得 } x_0 = \pm 2,$$

因为点 Q 位于第一象限, 所以 $Q(2, 1)$ 2分

$$\text{将点 } Q(2, 1) \text{ 代入椭圆 } C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 中, 得 } \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1. \dots\dots\dots 3分$$

$$\text{联立 } \begin{cases} c = \sqrt{6}, \\ \frac{4}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \text{ 解得 } a^2 = 8, b^2 = 2. \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \dots\dots\dots 4分$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程为 } \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1. \dots\dots\dots 5分$$

(2) 依题意可知, 直线 QM 和直线 QN 的斜率存在, 不为零且互为相反数.

设直线 QM 的斜率为 k , 则直线 QN 的斜率为 $-k$ 6分

由(1)可知 $Q(2, 1)$, 所以直线 QM 的方程为 $y - 1 = k(x - 2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y - 1 = k(x - 2), \\ \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 并化简, 得 } (1 + 4k^2)x^2 - (16k^2 - 8k)x + 16k^2 - 16k - 4 = 0,$$

$$\Delta = (16k^2 - 8k)^2 - 4(1 + 4k^2)(16k^2 - 16k - 4) = 16(2k + 1)^2 > 0, \dots\dots\dots 8分$$

则 $k \neq -\frac{1}{2}$, 根据直线 QM , 直线 QN 的对称性, 可知 $k \neq \pm \frac{1}{2}$.

$$\text{设 } M(x_1, y_1), \text{ 则 } x_1 + x_Q = x_1 + 2 = \frac{16k^2 - 8k}{1 + 4k^2}. \dots\dots\dots 9分$$



所以 $x_1 = \frac{16k^2 - 8k}{1 + 4k^2} - 2$, 所以 $y_1 = k(x_1 - 2) + 1 = k\left(\frac{16k^2 - 8k}{1 + 4k^2} - 2 - 2\right) + 1 = \frac{-4k^2 - 4k + 1}{1 + 4k^2}$.

故 $M\left(\frac{16k^2 - 8k}{1 + 4k^2} - 2, \frac{-4k^2 - 4k + 1}{1 + 4k^2}\right)$ 10 分

以 $-k$ 替换 k , 得 $N\left(\frac{16k^2 + 8k}{1 + 4k^2} - 2, \frac{-4k^2 + 4k + 1}{1 + 4k^2}\right)$ 11 分

所以 $k_{MN} = \frac{\frac{-4k^2 + 4k + 1}{1 + 4k^2} - \frac{-4k^2 - 4k + 1}{1 + 4k^2}}{\frac{16k^2 + 8k}{1 + 4k^2} - 2 - \left(\frac{16k^2 - 8k}{1 + 4k^2} - 2\right)} = \frac{8k}{16k} = \frac{1}{2}$.

所以直线 MN 的斜率为定值 $\frac{1}{2}$ 12 分

21.【解析】(1) 由题意, 得 $f'(x) = e^x - a$.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) = e^x - a > 0$, $f(x)$ 单调递增, 无最小值, 不满足题意. 1 分

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \ln a$.

当 $x \in (-\infty, \ln a)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(\ln a) = e^{\ln a} - a \ln a - 1 = 0$, 即 $\ln a + \frac{1}{a} - 1 = 0$ 3 分

设 $\varphi(a) = \ln a + \frac{1}{a} - 1$, 则 $\varphi'(a) = \frac{a-1}{a^2}$. 令 $\varphi'(a) = 0$, 得 $a = 1$ 4 分

当 $a \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(a) < 0$; 当 $a \in (1, +\infty)$ 时, $\varphi'(a) > 0$.

所以 $\varphi(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

即 $\varphi(a)_{\min} = \varphi(1) = 0$, 故 $\ln a + \frac{1}{a} - 1 = 0$ 的解只有 $a = 1$. 综上所述, $a = 1$ 6 分

(2) 由(1)可得 $f(x) = e^x - x - 1 \geq 0$, 所以 $e^x \geq x + 1$. 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立. 当 $x > -1$ 时, 不等式两边取对数, 得 $x \geq \ln(x+1)$, 所以 $\ln x \leq x - 1$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号成立. 7 分

当 $x \in (0, 1)$ 时, 设 $F(x) = xe^x - (1+x) - \ln x$,

则 $F(x) = e^{x+\ln x} - (1+x) - \ln x \geq x + \ln x + 1 - (1+x) - \ln x = 0$, 当且仅当 $x + \ln x = 0$ 时, 等号成立.

因为 $0.1 + \ln 0.1 \neq 0$, 所以 $0.1e^{0.1} - 1.1 - \ln 0.1 > 0$, 所以 $m_2 > m_1$ 9 分

当 $x \in (0, 1)$ 时, 设 $G(x) = x + \ln x - \ln \frac{x}{1-x}$, 因为 $0 < 1-x < 1$,

所以 $G(x) = x + \ln x - \ln x + \ln(1-x) = x + \ln(1-x) < x + 1 - x - 1 = 0$ 10 分

所以 $x + \ln x < \ln x - \ln(1-x)$, 即 $xe^x < \frac{x}{1-x}$.

故 $0.1e^{0.1} < \frac{0.1}{1-0.1} = \frac{1}{9}$, 所以 $m_2 < m_3$.

综上所述, $m_1 < m_2 < m_3$ 12 分

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22.【解析】(1) 由 $\begin{cases} y=t, \\ x=2(t-2\sqrt{2}), \end{cases}$ 得 $x=2(y-2\sqrt{2})$. 所以 $x-2y+4\sqrt{2}=0$.

故直线 l 的普通方程是 $x-2y+4\sqrt{2}=0$ 2 分

由 $\rho^2(1+3\sin^2\theta)=1$, 得 $\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta=1$, 来源: 高三答案公众号

代入公式 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$ 得 $x^2+y^2+3y^2=1$. 所以 $x^2+4y^2=1$, 即 $x^2+\frac{y^2}{\frac{1}{4}}=1$.

故曲线 C 的直角坐标方程是 $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1$ 4 分

(2) 方法一: 由 $\theta = \beta$ (其中 $\beta \in (0, \pi)$, 且 $\tan \beta = -\frac{1}{2}, \rho \geq 0$), 得 $\sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 5 分

现将射线 $\theta = \beta (\rho \geq 0)$ 代入曲线 C 的极坐标方程, 可得 $\rho_M^2 = \frac{1}{1+3\sin^2\beta} = \frac{1}{1+3 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{5}{8}$,

所以 $\rho_M = \frac{\sqrt{10}}{4}$ 7 分

又直线 l 的极坐标方程为 $\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta + 4\sqrt{2} = 0$, 8 分

现将 $\theta = \beta (\rho \geq 0)$ 代入直线 l 的极坐标方程, 可得 $\rho_N = \frac{4\sqrt{2}}{2\sin\beta - \cos\beta} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)} = \sqrt{10}$ 9 分

所以 $|MN| = \rho_N - \rho_M = \sqrt{10} - \frac{\sqrt{10}}{4} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$ 10 分

方法二: 由题可得射线 $\theta = \beta$ (其中 $\beta \in (0, \pi)$, 且 $\tan \beta = -\frac{1}{2}, \rho \geq 0$) 的直角坐标方程为 $y = -\frac{1}{2}x (x \leq 0)$.

联立 $\begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \\ y = -\frac{1}{2}x (x \leq 0), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = \frac{\sqrt{2}}{4}. \end{cases}$ 则点 $M\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 6 分

联立 $\begin{cases} x - 2y + 4\sqrt{2} = 0, \\ y = -\frac{1}{2}x (x \leq 0), \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x = -2\sqrt{2}, \\ y = \sqrt{2}. \end{cases}$ 则点 $N(-2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 8 分

所以 $|MN| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4} - \sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$ 10 分

23. 【解析】(1) 由已知可得

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 4 - 2ab \geq 4 - 2 \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = 2,$$

当且仅当 $a = b = 1$ 时, 等号成立. 5 分

(2) 因为 $a + b = 2$, 所以 $(b+2) + a = 4$, 所以 $\frac{1}{2|a|} = \frac{1}{2|a|} \cdot \frac{a+(b+2)}{4} = \frac{a}{8|a|} + \frac{b+2}{8|a|}$ 6 分

所以原式 $= \frac{a}{8|a|} + \frac{b+2}{8|a|} + \frac{|a|}{2(b+2)} \geq \frac{a}{8|a|} + 2\sqrt{\frac{b+2}{8|a|} \cdot \frac{|a|}{2(b+2)}} = \frac{a}{8|a|} + \frac{1}{2}$, 8 分

当且仅当 $\frac{b+2}{8|a|} = \frac{|a|}{2(b+2)}$, 即 $a = -4, b = 6$, 或 $a = \frac{4}{3}, b = \frac{2}{3}$ 时, 等号成立.

因为 $a < 0$ 时, $\left(\frac{a}{8|a|}\right)_{\min} = -\frac{1}{8}$, 所以 $\frac{1}{2|a|} + \frac{|a|}{2(b+2)}$ 的最小值为 $\frac{3}{8}$ 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线