

安徽省六校教育研究会 2023 年高二年级八学系质测试

数学试题卷

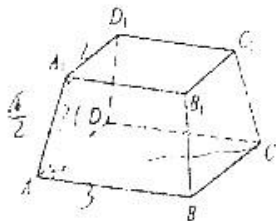
注意事项:

1. 你拿到的试卷满分为 150 分, 考试时间为 120 分钟。
2. 试卷包括“试题卷”和“答题卷”两部分, 请务必在“答题卷”上答题, 在“试题卷”上答题无效。

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、单选题 (本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 每小题只有一个正确答案, 请把正确答案涂在答题卡上)

1. 设复数 $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, 则在复平面内 $\frac{z+1}{z}$ 对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知集合 $A = \{(x, y) | xy = 1\}$, $B = \{(x, y) | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$, 则 $A \cap B$ 有 () 个真子集
A. 3 B. 16 C. 15 D. 4
3. 已知 $a > 0$ 且 $a \neq 1$, “函数 $f(x) = a^x$ 为增函数”是“函数 $g(x) = x^a$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增”的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 2021 年 2 月 10 日, 天问一号探测器顺利进入火星的椭圆环火轨道 (将火星近似看成一个球体, 球心为椭圆的一个焦点). 2 月 15 日 17 时, 天问一号探测器成功实施捕获轨道远火点 (椭圆轨道上距离火星表面最远的一点) 平面机动, 同时将近火点高度调整至约 265km. 若此时远火点距离约为 11945km, 火星半径约为 3395km, 则调整后天问一号的运行轨道 (环火轨道曲线) 的焦距约为 ()
A. 11680km B. 5840km C. 19000km D. 9500km
5. 如图, 一种棱台形状的无盖容器 (无上底面 $A_1B_1C_1D_1$) 模型其上、下底面均为正方形, 面积分别为 4cm^2 , 9cm^2 , 且 $A_1A = B_1B = C_1C = D_1D$, 若该容器模型的体积为 $\frac{19}{3}\text{cm}^3$, 则该容器模型的表面积为 ()
A. $(5\sqrt{3} + 9)\text{cm}^2$ B. 19cm^2
C. $(5\sqrt{5} + 9)\text{cm}^2$ D. $(5\sqrt{37} + 9)\text{cm}^2$
6. 在 $\triangle ABC$ 中, $|AB| = 3$, $|AC| = 2$, $\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$, 则直线 AD 通过 $\triangle ABC$ 的 ()
A. 垂心 B. 外心 C. 重心 D. 内心
7. 已知向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 60° 的单位向量, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (m, +\infty)$, 且 $x_1 < x_2$, $\frac{x_1 \ln x_2 - x_2 \ln x_1}{x_2 - x_1} > |\vec{a} - \vec{b}|$, 则 m 的取值范围是 ()
A. $[e^2, +\infty)$ B. $[e, +\infty)$ C. $[\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $[\frac{1}{e}, e]$
8. 已知直线 l 与曲线 $y = e^x$ 相切, 切点为 P , 直线 l 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A, B , O 为坐标原点. 若 $\triangle OAB$ 的面积为 $\frac{1}{e}$, 则点 P 的个数是 ()
A. 1 B. 2 C. 3 D. 4



二、多选题（本大题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分。请把正确答案涂在答题卡上）

9. 以下四个命题中，真命题的有

- A. 在回归分析中，可用相关指数 R^2 的值判断模型的拟合效果， R^2 越大，模型的拟合效果越好；
- B. 回归模型中残差是实际值 y_i 与估计值 \hat{y}_i 的差，残差点所在的带状区域宽度越窄，说明模型拟合精度越高；
- C. 对分类变量 x 与 y 的统计量 χ^2 来说， χ^2 值越小，判断“ x 与 y 有关系”的把握程度越大；
- D. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n, \frac{1}{3})$ ，若 $E(3X+1)=6$ ，则 $n=6$ 。

10. 2022年9月钱塘江多处出现罕见景象“鱼鳞潮”，“鱼鳞潮”的形成需要两股涌潮，一股是波状涌潮，另外一股是破碎的涌潮，两者相遇交叉就会形成像鱼鳞一样的涌潮。若波状涌潮的图像近似函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$

$(A, \omega \in \mathbb{N}^*, |\varphi| < \frac{\pi}{3})$ 的图像，而破碎的涌潮的图像近似 $f'(x)$ ($f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数) 的图像。已知当 $x=2\pi$ 时，两潮有一个交叉点，且破碎的涌潮的波谷为 -4 ，则

- A. $\omega=2$
- B. $\begin{cases} \frac{\pi}{3} \\ \sqrt{2} \end{cases}$
- C. $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图像关于原点对称
- D. $f'(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$ 上单调

11. 在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 AB, BC 的中点，则

- A. 异面直线 DD_1 与 B_1F 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$
- B. 点 P 为正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，当 $DP \perp$ 平面 B_1EF 时， DP 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- C. 过点 D_1, E, F 的平面截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 所得的截面周长为 $2\sqrt{13}+\sqrt{2}$
- D. 当三棱锥 B_1-BEF 的所有顶点都在球 O 的表面上时，球 O 的表面积为 6π

12. 对于正整数 n ， $\varphi(n)$ 是小于或等于 n 的正整数中与 n 互质的数的数目。函数 $\varphi(n)$ 以其首名研究者欧拉命名，称为欧拉函数，又称为 φ 函数，例如 $\varphi(10)=4$ ，(10 与 1, 3, 7, 9 均互质) 则

- A. $\varphi(12)+\varphi(29)=32$
- B. 数列 $\{\varphi(2n)\}$ 不是单调递增数列
- C. 若 p 为质数，则数列 $\{\varphi(p^n)\}$ 为等比数列
- D. 数列 $\left\{\frac{n}{\varphi(n)}\right\}$ 的前4项和等于 $\frac{58}{27}$

第II卷（非选择题 共90分）

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 在 $\left(x-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ 的展开式中，只有第4项的二项式系数最大，则展开式中含 x^2 项的系数为

14. 曲线 $f(x)=(x+m)\ln x (m \in \mathbb{R})$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线平分圆 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ ，则函数 $y=f(x)$ 的零点为

15. 已知函数 $f(x)=3\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}+\varphi\right) (0 < \omega < 4, 0 < \varphi < \pi)$ ，若 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3$ ， $f(x)=f(|x|)$ ，则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=$

16. 设抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 准线为 l 与 x 轴的交点为 N , 过抛物线上一点 P 作 l 的垂线, 垂足为 Q , 若 $M(3,0)$, PF 与 MQ 相交于点 T , 且 $\overrightarrow{TN} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{MT}$, 则点 T 的纵坐标为 _____.

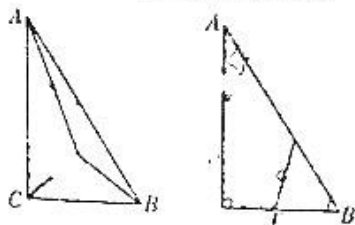
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本题满分 10 分) 等差数列 $\{a_n\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 中, a_1, a_2, a_3 分别是下表第一、二、三行中的某一个数, 且其中的任何两个数都不在下表的同一列.

	第一列	第二列	第三列
第一行	5	8	2
第二行	4	3	12
第三行	16	6	9

- (1) 请选择一个可能的 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 组合, 并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 (2) 记 (1) 中您选择的 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 判断是否存在正整数 k , 使得 a_1, a_k, S_{k-2} 成等比数列. 若存在, 请求出 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

18. (本题满分 12 分) 某游乐园有一个池塘, 其形状为直角 $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AB = 2$ 百米, $BC = 1$ 百米, 现准备养一批观赏鱼供游客观赏.



图①

- (1) 若在 $\triangle ABC$ 内部取一点 P , 建造 APC 连廊供游客观赏, 如图①, 使得点 P 是等腰三角形 PBC 的顶点, 且 $\angle CPB = \frac{2\pi}{3}$, 求连廊 $AP + PC$ 的长;
 (2) 若分别在 AB, BC, CA 上取点 D, E, F , 建造 $\triangle DEF$ 连廊供游客观赏, 如图②, 使得 $\triangle DEF$ 为正三角形, 求 $\triangle DEF$ 连廊长的最小值.

19. (本题满分 12 分) 2020 年席卷全球的新冠肺炎给世界人民带来了巨大的灾难, 面对新冠肺炎, 早发现、早诊断、早隔离、早治疗是有效防控疾病蔓延的重要举措之一. 某社区对 55 位居民是否患有新冠肺炎疾病进行筛查, 先到社区医务室进行口拭子核酸检测, 检测结果成阳性者, 再到医院做进一步检查, 已知随机一人其口拭子核酸检测结果成阳性的概率为 2%, 且每个人的口拭子核酸是否呈阳性相互独立.

(1) 假设该疾病患病的概率是 0.3%, 且患病者口拭子核酸呈阳性的概率为 98%, 设这 55 位居民中有一位的口拭子核酸检测呈阳性, 求该居民可以确诊为新冠肺炎患者的概率;

(2) 根据经验, 口拭子核酸检测采用分组检测法可有效减少工作量, 具体操作如下: 将 55 位居民分成若干组, 先取每组居民的口拭子核酸混在一起进行检测, 若结果显示阴性, 则可断定本组居民没有患病, 不必再检测; 若结果显示阳性, 则说明本组中至少有一位居民患病, 需再逐个进行检测, 现有两个分组方案:

方案一: 将 55 位居民分成 11 组, 每组 5 人;

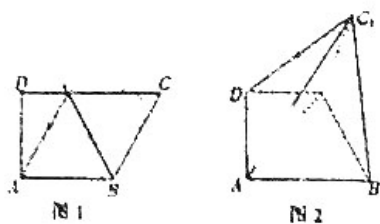
方案二: 将 55 位居民分成 5 组, 每组 11 人;

试分析哪一个方案的工作量更少?

(参考数据: $0.98^5 = 0.904$, $0.98^{11} = 0.801$)



20. (本题满分 12 分) 图 1 是直角梯形 $ABCD$, $AB \parallel CD$, $\angle D = 90^\circ$, 四边形 $ABCE$ 是边长为 2 的菱形, 并且 $\angle BCE = 60^\circ$. 以 BE 为折痕将 $\triangle BCE$ 折起, 使点 C 到达 C_1 的位置, 且 $AC_1 = \sqrt{6}$.



(1) 求证: 平面 $BC_1E \perp$ 平面 $ABED$.

(2) 在棱 DC_1 上是否存在点 P , 使得点 P 到平面 ABC_1 的距离为 $\frac{\sqrt{15}}{2}$? 若存在, 求出直线 EP 与平面 ABC_1 所成角的正弦值; 若不存在, 请说明理由.

21. (本题满分 12 分) 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 $F(\sqrt{3}, 0)$, 渐近线与抛物线

$$C_2: y^2 = 2px (p > 0) \text{ 交于点 } \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(1) 求 C_1, C_2 的方程;

(2) 设 A 是 C_1 与 C_2 在第一象限的公共点, 作直线 l 与 C_1 的两支分别交于点 M, N , 使得 $AM \perp AN$.

(i) 求证: 直线 MN 过定点;

(ii) 过 A 作 $AD \perp MN$ 于 D , 是否存在定点 P , 使得 $|DP|$ 为定值? 如果有, 请求出点 P 的坐标; 如果没有, 请说明理由.

22. (本题满分 12 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - e^{x-1}$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 证明: $f(x)$ 在 R 上为减函数.

(2) 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f(x) \leq a \cos x$, 求实数 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

