2023届"3+3+3"高考备考诊断性联考卷（三）
文科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	C	A	A	A	C	B	C	A	D	B

【解析】

1．$z=1+2\mathrm{i}$，故$z\,\mathrm{i}=\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2=-2+\mathrm{i}$，故选B．

2．$B=\{0，1，2，3，4\}$，故$A\cap B=\{0，1，2\}$，故选D．

3．对于A：由题图知，2023年4月19日至4月25日的高速公路车流量的极差为$25-2=23$，故A正确；对于B：易知2023年4月19日至4月25日的高速公路车流量的中位数为17，故B正确；对于C：2023年4月19日至4月21日的高速公路车流量波动更大，故C错误；对于D：2023年4月23日的高速公路车流量为22万车次，同比增长率为10%，设2022年4月23日的高速公路车流量为x万车次，则$\dfrac{22-x}{x}\times100\%=10\%$，解得$x=20$，故D正确，故选C．

4．观察主视图中的木条位置和木条的层次位置，分析可知侧视图是A，故选A．

5．由$f(x)=\sqrt{3}\sin(2x+\theta)+\cos(2x+\theta)=2\sin\left(2x+\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$为偶函数，所以$\theta+\dfrac{\pi}{6}=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，$\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，故选A．

6．因为$f(x)=\dfrac{|\sin x|}{x^2+2}$，所以$f(-x)=f(x)$，即函数为偶函数，排除C，D；因为$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)>0$，所以排除B，故选A．

7．连接AC_1，因为$BC /\!/ B_1C_1$，所以直线AB_1与BC所成的角即为$\angle AB_1C_1$，设$AB=a$，易得$AB_1=\sqrt{2}a$，$AC_1=\sqrt{2}a$，则由余弦定理知，$\cos\angle AB_1C_1=\dfrac{AB_1{}^2+B_1C_1{}^2-AC_1{}^2}{2AB_1\cdot B_1C_1}=\dfrac{2a^2+a^2-2a^2}{2\sqrt{2}a\cdot a}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，故选C．

8．从$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{6}$这五个分数中任选两个数，则有：$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{5}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{5}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{6}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{6}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{6}\right\}$，共10种情况，其中这个数的和大于$\dfrac{3}{5}$的有$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{5}\right\}$，$\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{6}\right\}$，共4种情况，故这两个数的和大于$\dfrac{3}{5}$的概率为$\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$，故选B．

9．$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$，由已知得$\begin{cases}a+2b+1=0,\\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3},\\ b=-\dfrac{1}{6},\end{cases}$ $f(x)=-\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{1}{6}x^2+x$，

$f'(x)=-\frac{2}{3x}-\frac{1}{3}x+1=-\frac{(x-2)(x-1)}{3x}$，由 $f'(x)>0$，得$1<x<2$，故选 C.

10. 由 $S=4\pi R^2=9\pi$，$\therefore R=\frac{3}{2}$，将正四面体放到正方体中，正方体的内切球即与正四面体的六条棱均相切，$\because R=\frac{3}{2}$，

$\therefore$正方体的棱长为3，则正四面体棱长为$3\sqrt{2}$，高为$2\sqrt{3}$，$\therefore V=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}h=9$，故选 A.

11. 曲线方程化为标准方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}-\frac{y^2}{\frac{1}{n}}=1$，则依题意可得$\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{n}}=2,\\ \frac{\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{m}}}=\frac{\sqrt{21}}{3},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=\frac{1}{3},\\ n=\frac{1}{4},\end{cases}$ 故选 D.

12. $b=\log_{5.1}4$，则$0<b<\log_5 4$，$c=\log_6 5>0$，$\therefore \frac{\log_5 4}{\log_6 5}=\frac{\lg 4}{\lg 5}\cdot\frac{\lg 6}{\lg 5}<\frac{\left(\frac{\lg 4+\lg 6}{2}\right)^2}{\lg^2 5}=\frac{\lg^2 24}{4\lg^2 5}$

$=\frac{\lg^2 24}{\lg^2 25}<1$，故$\log_5 4<\log_6 5$，则$0<b<c$，而$7<e^2<8$，故$e<2\sqrt{2}$，$\therefore e^{0.9}<e<2\sqrt{2}$，则$a=e^{0.9}-2\sqrt{2}<0$，

所以$a<b<c$，故选 B.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	$-\frac{12}{5}$	$\sqrt{5}-1$	$\sqrt{3}+1$	$\left(-1,\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$

【解析】

13. 由题意，向量$\vec{a}$与$\vec{b}$垂直，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=-m-4m-12=0$，解得$m=-\frac{12}{5}$.

14. 圆心$C(1,0)$，半径$r=1$，圆心$C(1,0)$到直线$2x-y+3=0$的距离为$d=\frac{|2-0+3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$，

由题意可知$|MN|_{\min}=d-r=\sqrt{5}-1$.

15. 已知条件可知$\triangle MF_1F_2$为直角三角形．设$|MF_1|=k$，$|MF_2|=\sqrt{3}k$，可得

$|F_1F_2|=\sqrt{|MF_1|^2+|MF_2|^2}=2k$，$\therefore e=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|MF_2|-|MF_1|}=\frac{2k}{\sqrt{3}k-k}=\sqrt{3}+1$.

16. 依正弦定理$\frac{b(\sin C-\sin B)}{a\sin A}=\frac{b(c-b)}{a^2}$，由$\tan A<0$，知角$A$是钝角，则$a^2>b^2+c^2$，当$c>b$时，令$\frac{c}{b}=t>1$，

$$\frac{b(c-b)}{a^2}<\frac{bc-b^2}{b^2+c^2}=\frac{\frac{c}{b}-1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2+1}=\frac{t-1}{t^2+1}=\frac{t-1}{(t-1)^2+2(t-1)+2}$$

$$=\frac{1}{(t-1)+\frac{2}{t-1}+2}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{(t-1)\cdot\frac{2}{t-1}}+2}=\frac{1}{2\sqrt{2}+2}=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$$，当且仅当$t=\sqrt{2}+1$时，取“=”，

即 $0<\dfrac{b(c-b)}{a^2}<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，当 $c=b$ 时，$\dfrac{b(c-b)}{a^2}=0$；当 $c<b$ 时，令 $\dfrac{c}{b}=t\in(0,\ 1)$，$\dfrac{b(c-b)}{a^2}>\dfrac{bc-b^2}{b^2+c^2}=\dfrac{\frac{c}{b}-1}{\left(\frac{c}{b}\right)^2+1}=\dfrac{t-1}{t^2+1}$，

令 $f(t)=\dfrac{t-1}{t^2+1}$，$t\in(0,\ 1)$，$f'(t)=\dfrac{1\bullet(t^2+1)-2t\bullet(t-1)}{(t^2+1)^2}=\dfrac{-t^2+2t+1}{(t^2+1)^2}>0$，所以 $f(t)$ 在 $(0,\ 1)$ 上单调递增，所以 $f(0)<f(t)\leqslant f(1)$，即 $-1<\dfrac{b(c-b)}{a^2}<0$，综上得 $-1<\dfrac{b(c-b)}{a^2}<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，所以 $\dfrac{b(\sin C-\sin B)}{a\sin A}$ 的取值范围是 $\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\right)$.

三、**解答题**（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）由频数分布表可知，该市一天的空气质量等级为1的概率为 $\dfrac{12+20+44}{200}=0.38$，

等级为2的概率为 $\dfrac{15+19+30}{200}=0.32$，等级为3的概率为 $\dfrac{16+16+14}{200}=0.23$，

等级为4的概率为 $\dfrac{7+5+2}{200}=0.07$．……………………………………………………（4 分）

由频数分布表可知，一天中到该公园锻炼的人次的平均数为 $\dfrac{100\times50+300\times60+500\times90}{200}=340$. ……………………………………………………（6 分）

（2）2×2 列联表如下：

	人次$\leqslant400$	人次>400
空气质量好	66	74
空气质量不好	44	16

……………………………………………………………………………………（8 分）

$K^2=\dfrac{200\times(66\times16-74\times44)^2}{110\times90\times140\times60}\approx11.640>10.828$，…………………………………（10 分）

因此，有99.9%的把握认为一天中到该公园锻炼的人次与该市当天的空气质量有关.

……………………………………………………………………………………（12 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（1）因为当 $n\geqslant2$ 时，有 $(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}+a_1=0$ ①，

所以当 $n\geqslant3$ 时，$(n-3)a_{n-1}-(n-2)a_{n-2}+a_1=0$ ②，……………………………………（2 分）

由①-②，整理可得 $a_n+a_{n-2}=2a_{n-1}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列．…………………（4 分）

（2）由（1）可知 $\{a_n\}$ 是等差数列，所以 $\begin{cases}S_4=\dfrac{4(a_1+a_4)}{2}=56,\\ a_1=20,\end{cases}$ ………………………（5 分）

可得$\begin{cases} a_4 = 8, \\ a_1 = 20, \end{cases}$ ……………………………………………………………………（7 分）

所以数列$\{a_n\}$的公差$d = \dfrac{8-20}{4-1} = -4$， ………………………………………………（8 分）

所以$a_n = 20 - 4(n-1) = -4n + 24$， …………………………………………………………（9 分）

所以$S_n = \dfrac{n(20-4n+24)}{2} = -2n^2 + 22n = -2\left(n - \dfrac{11}{2}\right)^2 + \dfrac{121}{2}$． …………………………（10 分）

又$n \in \mathbf{N}^*$，所以当$n = 5$或$n = 6$时，S_n取到最大值为 60． ……………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

（1）证明：∵ $ABCD$为直角梯形，$AB /\!/ CD$，∴ $CD \perp BC$．

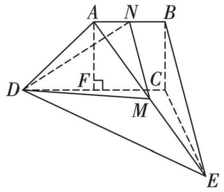
又∵ $CD \perp CE$，$BC \cap CE = C$，…………………………………………………………（1 分）

$CD \perp$ 平面BCE． …………………………………………………………………………（2 分）

又∵ $BE \subset$ 平面BCE，∴ $CD \perp BE$． ………………………………………………………（3 分）

又∵ $\angle ADC = 45°$，$AD = \sqrt{2}$，

如图，过点 A 作 $AF \perp CD$，∴ $AF = 1$，∴ $BC = 1$．



又∵ $\angle EDC = 45°$，∴ $CD = CE = 2$．

又∵ $BE = \sqrt{3}$，由勾股定理可知 $BE \perp BC$. ……………………（4 分）

∵ $BC \cap CD = C$，∴ $BE \perp$ 平面$ABCD$． ……………………（5 分）

∵ $BE \subset$ 平面 ABE,

∴平面 $ABE \perp$ 平面 $ABCD$． ……………………………………………………………（6 分）

（2）解：取 AB 的中点 N，连接 DN，MN，……………………………………………（7 分）

∵M 为 AE 的中点，$BE = \sqrt{3}$, ∴ $MN /\!/ BE$，$MN = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……………………………（8 分）

由（1）知 $BE \perp$ 平面 $ABCD$，∴$MN \perp$ 平面 $ABCD$，

∴$\angle MDN$ 为直线 DM 与平面 $ABCD$ 所成角． ………………………………………（9 分）

由（1）知$CD \perp BC$，又$AB /\!/ CD$，$AB = \dfrac{1}{2}CD$，$\angle ADC = 45°$，$AD = \sqrt{2}$,

∴ $AB = BC = \dfrac{1}{2}CD = 1$，$DN = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$， ………………………………………………（10 分）

∴ $DM^2 = DN^2 + MN^2 = \dfrac{13}{4} + \dfrac{3}{4} = 4$,

∴ $DM = 2$． ………………………………………………………………………………（11 分）

∴$\sin\angle MDN = \dfrac{MN}{DM} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$． ……………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意得，令$\varphi(x) = f(x-1) + 1 - kx = \ln x + 1 - kx \leqslant 0$，$\varphi(x)$的定义域为$(0, +\infty)$，

由$\varphi(x)\leqslant 0$，得：$k\geqslant\frac{\ln x+1}{x}$．…………（1分）

设$m(x)=\frac{\ln x+1}{x}$，则$m'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，…………（2分）

∴当$x\in(0,1)$时，$m'(x)>0$；当$x\in(1,+\infty)$时，$m'(x)<0$；

…………（3分）

∴$m(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，∴$m(x)_{\max}=m(1)=1$，

…………（4分）

∴$k\geqslant 1$，即实数k的取值范围为$[1,+\infty)$．…………（5分）

（2）令$h(x)=\ln(x+1)-\frac{kx}{x+k}$，$h(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$．

$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{k^2}{(x+k)^2}=\frac{x[x-(k^2-2k)]}{(x+1)(x+k)^2}$．…………（6分）

①当$k\in(0,1)\cup(1,2)$时，$x\in(-1,k^2-2k)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(-1,k^2-2k)$上是增函数；

$x\in(k^2-2k,0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(k^2-2k,0)$上是减函数；

$x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数；

…………（8分）

②当$k=1$时，$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$，

$x\in(-1,0)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(-1,0)$上是减函数；

$x\in(0,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,+\infty)$上是增函数；…………（10分）

③当$k=2$时，$h'(x)\geqslant 0$，$h(x)$单调递增；

④当$k>2$时，$x\in(-1,0)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(-1,0)$上是增函数，

$x\in(0,k^2-2k)$时，$h'(x)<0$，$h(x)$在$(0,k^2-2k)$上是减函数，

$x\in(k^2-2k,+\infty)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$是增函数．…………（12分）

21．（本小题满分12分）

（1）解：$L_1=|PF_1|+|PF_2|+|F_1F_2|=2a+2c$，

$L_2=|PF_1|+|PF_2|+|BF_1|+|BF_2|=2a+2a=4a$，

…………（2分）

则$\frac{L_1}{L_2}=\frac{2a+2c}{4a}=\frac{3}{4}$得$a=2c$与$b=\sqrt{3}$联立，解得$a^2=4$，$b^2=3$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．…………（4分）

（2）证明：设$P(x_0,\ y_0)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1$，

可设直线PA的方程为$x=my-1$，其中$m=\frac{x_0+1}{y_0}$，

联立$\begin{cases}x=my-1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

则$y_0y_1=\dfrac{-9}{3m^2+4}=\dfrac{-9}{3\left(\dfrac{x_0+1}{y_0}\right)^2+4}$， ……………………………………………………（6分）

同理可得，$y_0y_2=\dfrac{-9}{3\left(\dfrac{x_0-1}{y_0}\right)^2+4}$． ……………………………………………………（7分）

因为$\dfrac{S_2}{S_3-S_2}+\dfrac{S_1}{S_2-S_1}=\dfrac{S_{\triangle PF_1B}}{S_{\triangle AF_1B}}+\dfrac{S_{\triangle PF_1F_2}}{S_{\triangle BF_1F_2}}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}PF_1\cdot F_1B\sin\angle PF_1B}{\frac{1}{2}AF_1\cdot F_1B\sin\angle AF_1B}+\dfrac{\frac{1}{2}PF_2\cdot F_1F_2\sin\angle PF_2F_1}{\frac{1}{2}BF_2\cdot F_1F_2\sin\angle BF_2F_1}$

$=\dfrac{PF_1}{AF_1}+\dfrac{PF_2}{BF_2}$， ……………………………………………………………………………（9分）

所以$\dfrac{S_2}{S_3-S_2}+\dfrac{S_1}{S_2-S_1}=\dfrac{PF_1}{AF_1}+\dfrac{PF_2}{BF_2}=\dfrac{y_0}{-y_1}+\dfrac{y_0}{-y_2}=-y_0\left(\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}\right)$……………………（10分）

$=\dfrac{y_0^2\left[3\left(\dfrac{x_0+1}{y_0}\right)^2+4+3\left(\dfrac{x_0-1}{y_0}\right)^2+4\right]}{9}$

$=\dfrac{3(x_0+1)^2+3(x_0-1)^2+8y_0^2}{9}$

$=\dfrac{6x_0^2+8y_0^2+6}{9}=\dfrac{24+6}{9}=\dfrac{10}{3}$，

所以$\dfrac{S_2}{S_3-S_2}+\dfrac{S_1}{S_2-S_1}$是定值． ……………………………………………………（12分）

22.（本小题满分10分）【选修4–4：坐标系与参数方程】

解：（1）C_1的参数方程为$\begin{cases}x=\cos\varphi,\\ y=1+\sin\varphi,\end{cases}$（$\varphi$为参数），消去$\varphi$可得，

$x^2+(y-1)^2=1$，所以曲线C_1的直角坐标方程为$x^2+y^2-2y=0$．

……………………………………………………………………………………（1分）

将$x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入得，曲线C_1的极坐标方程为$\rho=2\sin\theta$， ……………（2分）

C_2的极坐标方程为$\rho=2\sqrt{3}\cos\theta$，联立可得$\tan\theta=\sqrt{3}$，$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$， ……………（3分）

所以曲线C_1和曲线C_2的交点极坐标为$(0,0)$和$\left(\sqrt{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$． …………………………（5分）

（2）当$\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，$\rho_M=2\sin\dfrac{\pi}{6}=1$，$\rho_N=2\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}=3$，$|MN|=|\rho_M-\rho_N|=2$．

…………………………………………………………………………（7分）

显然当点 P 到直线 MN 的距离最大时，$\triangle PMN$ 的面积最大，

直线 MN 的方程为 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$，点 P 到直线 MN 的最大距离为 $\sqrt{3}$，

…………………………………………………………………………（9分）

所以 $S_{\triangle PMN}=\dfrac{1}{2}\times|MN|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$．　…………………………（10分）

23.（本小题满分10分）【选修4−5：不等式选讲】

（1）解：原不等式等价于 $|x+3|+|x-1|\geqslant m^2-3m$，$x\in\mathbf{R}$，…………………（1分）

$\because |x+3|+|x-1|\geqslant|x+3-x+1|=4$，…………………………………（3分）

$\therefore 4\geqslant m^2-3m$，解得 $-1\leqslant m\leqslant 4$．…………………………………………（5分）

（2）证明：由（1）知 $M=-1$，

$\therefore a+b=2$，$\therefore (a+1)+(b+1)=4$．…………………………………………（6分）

$\because \dfrac{1}{a+1}+\dfrac{4}{b+1}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{4}{b+1}\right)[(a+1)+(b+1)]=\dfrac{1}{4}\left[5+\dfrac{b+1}{a+1}+\dfrac{4(a+1)}{b+1}\right]\geqslant\dfrac{1}{4}\times(5+4)=\dfrac{9}{4}$，

…………………………………………………………………………（9分）

当且仅当 $a=\dfrac{1}{3}$，$b=\dfrac{5}{3}$ 时等号成立．…………………………………………（10分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。