高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，$B=\{x|(x+3)(1-x)>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-1,0,1\}$　　B. $\{-1,0\}$　　C. $\{-2,-1,0\}$　　D. $\{-2,-1\}$

2. 若复数 z 满足 $(2-i)z-i=5+4i$，则 $z=$

A. $3+3i$　　B. $3-3i$　　C. $1+3i$　　D. $1-3i$

3. 在区间 $[0,\pi]$ 上随机取一个数 x，则事件"$\cos x>\frac{1}{2}$"的概率为

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{1}{2}$

4. "$\log_3(x-2)<1$"成立的一个必要不充分条件为

A. $2<x<5$　　B. $x>5$　　C. $x<5$　　D. $3<x<5$

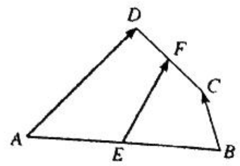
5. 从某中学甲、乙两班中分别随机抽取10名同学，测量他们的身高(单位：cm)，所得数据用茎叶图表示如下，由此估计甲、乙两班同学的身高情况，针对甲、乙两班分别抽取的10名同学的两组数据，下列结论正确的是

甲班		乙班
2 1	18	2
8 2 0	17	1 2 6 8 9
6 5 3	16	2 4 7
8 7	15	9

A. 甲、乙两班同学身高的极差不相等　　B. 甲班同学身高的平均值较大

C. 甲班同学身高的中位数较大　　D. 甲班同学身高在175 cm以上的人数较多

6. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，E、F 分别为 AB、CD 的中点，若 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则 $\overrightarrow{EF}=$



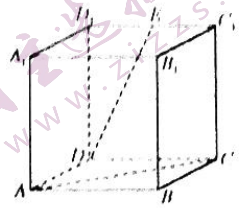
A. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$　　B. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$

C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$　　D. $\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{3}{2}\boldsymbol{b}$

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x+2)=f(x-2)$，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=3^x$，则 $f(2\,022)+f(2\,023)=$

A. 3　　B. 0　　C. -1　　D. -3

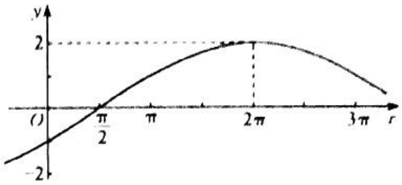
8. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 为棱 C_1D_1 的中点，则异面直线 AC 与 DE 所成角的余弦值为



A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{3}{4}$

9. 如图，函数 $f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象过 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$，$(2\pi,2)$ 两点，为得到函数 $g(x)=2\cos(\omega x-\varphi)$ 的图象，应将 $f(x)$ 的图象



A. 向右平移 $\frac{7\pi}{6}$ 个单位长度

B. 向左平移 $\frac{7\pi}{6}$ 个单位长度

C. 向右平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度

D. 向左平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与斜率为 1 的直线交于 A,B 两点，若线段 AB 的中点为 $(4,1)$，则 C 的离心率 $e=$

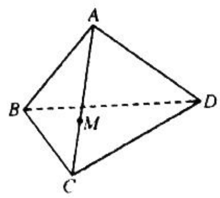
A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\sqrt{3}$

11. 下列函数中，最小值不为 2 的是

A. $y=\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}$　　B. $y=\cos x+x\sin x+\frac{3\pi}{2}+2(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$

C. $y=\frac{\sqrt{3}\sin x+3\cos x+6}{\cos x+2}$　　D. $y=\sqrt{x}+\sqrt{9-x}$

12. 如图，在三棱锥 $A-BCD$ 中，平面 $ABD\perp$ 平面 CBD，$AB=BC=CD=AD=BD=6$，点 M 在 AC 上，$AM=2MC$，过点 M 作三棱锥 $A-BCD$ 外接球的截面，则截面圆面积的最小值为



A. 12π　　B. 10π

C. 8π　　D. 4π

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x\leqslant 2,\\x+y-1\geqslant 0,\\x-y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $z=x-3y$ 的最大值为__________.

14. 已知 $f(x)=(x+1)e^x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为__________.

15. 已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$，过 C 的焦点 F 且斜率为 1 的直线交 C 于 A,B 两点，若 $|FA|\cdot|FB|=32$，则 $p=$__________.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，D 在边 BC 上，且 AD 平分 $\angle BAC$，$AD=\sqrt{3}$，$b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$，$\sin C=3\sin B$，则 $\triangle ABC$ 的面积为__________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共60分。

17.（本小题满分12分）

2022年7月6日～14日，素有"数学界奥运会"之称的第29届国际数学家大会，受疫情影响，在线上进行，世界各地的数学家们相聚云端、共襄盛举．某学校数学爱好者协会随机调查了学校100名学生，得到如下调查结果：男生占调查人数的55%，喜欢数学的有40人，其他的不喜欢数学；在调查的女生中，喜欢数学的有20人，其他的不喜欢数学．

（1）请完成下面2×2列联表；

	喜欢数学	不喜欢数学	合计
男生			
女生			
合计			

（2）根据2×2列联表，判断是否有99.5%的把握认为该校学生喜欢数学与学生的性别有关？

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

临界值表：

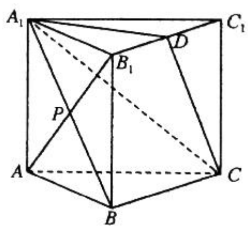
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

18.（本小题满分12分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 为棱 B_1C_1 的中点．

（1）证明：AB_1 // 平面 A_1CD；

（2）设 P 为 AB_1 与 A_1B 的交点，若 $\triangle A_1B_1C_1$ 是边长为2的等边三角形，$AA_1=\sqrt{3}$，求点 P 到平面 A_1CD 的距离．



19.（本小题满分12分）

在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且 $\forall n\geqslant 2$，$a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $b_n=\dfrac{1}{a_na_{n+1}}$，且数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，证明：$S_n<3$．

20.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+2}{2}x^2+2ax+1$.

(1)若 $x=4$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a 的值，并判断 $x=4$ 是 $f(x)$ 的极大值点还是极小值点？

(2)若 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有零点，求实数 a 的取值范围.

21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，且 F_1,F_2 与短轴的两个端点恰好为正方形的四个顶点，点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在 E 上.

(1)求 E 的方程；

(2)过点 F_2 作互相垂直且与 x 轴均不重合的两条直线分别交 E 于点 A,B 和 C,D，若 M,N 分别是弦 AB,CD 的中点，证明：直线 MN 过定点.

(二)选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 两题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22.（本小题满分 10 分）**选修 4－4：坐标系与参数方程**

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+2\cos\alpha,\\ y=2\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）. 以 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=m$.

(1)求 C_1 的普通方程和 C_2 的直角坐标方程；

(2)若 C_1 与 C_2 交于相异两点 A,B，且 $|AB|=2\sqrt{3}$，求 m 的值.

23.（本小题满分 10 分）**选修 4－5：不等式选讲**

已知 $a>0,b>0,c>0$，证明：

(1)$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab\geq 8$；

(2)$\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geq abc$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. B　由题意知 $B=(-3,1)$，所以 $A\cap B=\{-1,0\}$. 故选 B.

2. C　由 $(2-i)z-i=5+4i$，得 $z=\frac{5+5i}{2-i}=\frac{(5+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5+15i}{5}=1+3i$. 故选 C.

3. A　因为 $x\in[0,\pi]$，$\cos x>\frac{1}{2}$，所以 $0\leqslant x<\frac{\pi}{3}$，故所求概率 $P=\frac{\frac{\pi}{3}-0}{\pi}=\frac{1}{3}$. 故选 A.

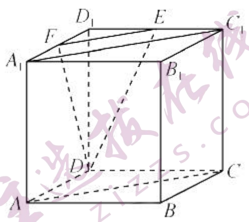
4. C　由 $\log_3(x-2)<1$，得 $2<x<5$，所以选项 A 是充要条件，选项 B 是既不充分又不必要条件，选项 D 是充分不必要条件，选项 C 是必要不充分条件. 故选 C.

5. A　甲班同学身高极差为 $182-157=25$，乙班同学身高极差为 $182-159=23$，即甲、乙两班同学身高的极差不相等，故 A 正确；易求甲、乙两班同学身高的平均值分别为 169.2，171，故乙班同学身高平均值较大，故 B 错误；甲、乙两班同学身高的中位数分别为 168，171.5，故 C 错误；甲、乙两班同学身高在 175 cm 以上的人数分别为 3 和 4，故 D 错误. 故选 A.

6. A　由题意知，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}$，$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$，因为 E,F 分别为 AB,CD 的中点，所以 $\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{EA}$，$\overrightarrow{DF}=-\overrightarrow{CF}$，所以 $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$，所以 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，即 $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$. 故选 A.

7. D　因为 $f(x+2)=f(x-2)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4，所以 $f(2\,022)+f(2\,023)=f(-2)+f(-1)=-f(2)-f(1)$；在 $f(x+2)=f(x-2)$ 中，令 $x=0$，得 $f(2)=f(-2)=-f(2)$，所以 $f(2)=0$，又 $f(1)=3$，所以 $f(2\,022)+f(2\,023)=-3$. 故选 D.

8. B　取 A_1D_1 的中点 F，连接 A_1C_1，EF，DF，则 $A_1C_1\parallel AC$，$EF\parallel A_1C_1$，所以 $EF\parallel AC$，所以 $\angle DEF$ 或其补角为 AC 与 DE 所成的角，设正方体的棱长为 2，则 $DE=DF=\sqrt{5}$，$EF=\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle DEF=\frac{5+2-5}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$. 故选 B.



9. D　设 $f(x)$ 的最小正周期为 T，由图象知 $\frac{T}{4}=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}$，所以 $T=6\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{6\pi}=\frac{1}{3}$，又 $f(2\pi)=2$，所以 $\frac{2\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=2\sin\left(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{6}\right)$，$g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$. 而 $g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)=2\sin\left[\frac{1}{3}\left(x+\frac{5\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{6}\right]$，所以将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{2}$ 个单位长度可得函数 $g(x)=2\cos\left(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象. 故选 D.

10. C　法一：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$，$\frac{x_2^2}{a^2}-\frac{y_2^2}{b^2}=1$，所以 $\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{a^2}-\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{b^2}=0$.

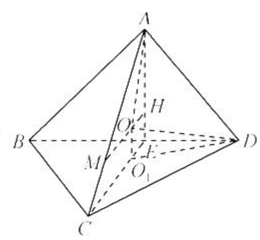
因为 AB 的中点为 $(4,1)$，所以 $x_1+x_2=8$，$y_1+y_2=2$，所以 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4b^2}{a^2}$，由题意知 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$，所以 $\frac{4b^2}{a^2}=1$，即 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{1}{4}$，

则 C 的离心率 $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.

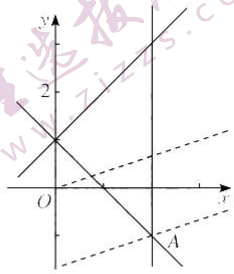
法二：直线 AB 过点 $(4,1)$，斜率为 1，所以其方程为 $y-1=x-4$，即 $y=x-3$. 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 并整理得 $(b^2-a^2)x^2+$

$6a^2x-9a^2-a^2b^2=0$. 因为(4,1)为线段AB的中点，所以$-\frac{6a^2}{b^2-a^2}=2\times4$，整理得$a^2=4b^2$，所以$C$的离心率$e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt5}{2}$，故选C.

11. D　对于A，$y=\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}\geqslant2\sqrt{\frac{x^2}{4}\cdot\frac{4}{x^2}}=2$，当且仅当$x=\pm2$时等号成立，故最小值为2；对于B，$y'=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$，所以$y$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$上单调递增，在$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调递减，从而$x=\frac{3\pi}{2}$为极小值点，又当$x=0$时，$y=\frac{3\pi}{2}+3$；当$x=\frac{3\pi}{2}$时，$y=2$，所以函数的最小值为2；对于C，$y=3+\sqrt3\cdot\frac{\sin x}{\cos x+2}$，因为$\frac{\sin x}{\cos x+2}$可以看作点$P(\cos x,\sin x)$与点$A(-2,0)$连线的斜率，又点$P(\cos x,\sin x)$在圆$x^2+y^2=1$上，易求得$PA$斜率的最小值为$-\frac{\sqrt3}{3}$，所以$y_{\min}=3+\sqrt3\times\left(-\frac{\sqrt3}{3}\right)=2$；对于D，$y^2=9+2\sqrt{x(9-x)}$，显然$(y^2)_{\min}=9$，又$y\geqslant0$，所以$y$的最小值为3，不是2. 故选D.



12. A　由题意知$\triangle ABD$和$\triangle BCD$为等边三角形，取BD中点为E，连接AE，CE，则$AE\perp BD$，由平面$ABD\perp$平面CBD，平面$ABD\cap$平面$CBD=BD$，故$AE\perp$平面CBD，$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt3$，易知球心$O$在平面$BCD$的投影为$\triangle BCD$的外心$O_1$，过$O$作$OH\perp AE$于$H$，易得$OH//O_1E$，$OO_1//HE$，则在$\mathrm{Rt}\triangle OHA$中，$OH=\sqrt3$，$AH=2\sqrt3$，所以外接球半径$R=\sqrt{OH^2+AH^2}=\sqrt{15}$，连接$OM$，因为$AH=2HE$，$OH//CE$，$AM=2MC$，所以$H$，$O$，$M$三点共线，所以$OM=MH-OH=\sqrt3$，当$M$为截面圆圆心时截面面积最小，此时截面圆半径$r=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt3)^2}=2\sqrt3$，面积为$12\pi$. 故选A.



13. 5　画出可行域(如图阴影部分)，当直线$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}z$经过点A时$z$的取值最大，易求得$A(2,-1)$，所以$z_{\max}=5$.

14. $2x-y+1=0$　因为$f'(x)=(x+2)e^x$，所以$f'(0)=2$，又$f(0)=1$，故所求切线方程为$y-1=2(x-0)$，即$2x-y+1=0$.

15. 4　由题意知$F\left(\frac{p}{2},0\right)$，直线$AB$的方程为$y=x-\frac{p}{2}$，代入$C$的方程并整理得$x^2-3px+\frac{p^2}{4}=0$，设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则$x_1+x_2=3p$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，因为$|FA|=\frac{p}{2}+x_1$，$|FB|=\frac{p}{2}+x_2$且$|FA|\cdot|FB|=32$，所以$\left(\frac{p}{2}+x_1\right)\left(\frac{p}{2}+x_2\right)=32$，即$\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}(x_1+x_2)+x_1x_2=32$，所以$\frac{p^2}{4}+\frac{p}{2}\cdot3p+\frac{p^2}{4}=32$，结合$p>0$，解得$p=4$.

16. $\frac{4\sqrt3}{3}$　由$b\sin B-a\sin A=c(\sin B-\sin C)$及正弦定理，得$b^2-a^2=c(b-c)$，即$b^2+c^2-a^2=bc$，由余弦定理得$\cos A=\frac{1}{2}$，又$A\in(0,\pi)$，所以$A=\frac{\pi}{3}$，因为$AD$平分$\angle BAC$，所以$\angle CAD=\angle BAD=\frac{\pi}{6}$，又因为$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle CAD}+S_{\triangle BAD}$，即$\frac{1}{2}bc\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}b\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}c\cdot AD\sin\frac{\pi}{6}$，化简得$bc=b+c$；由$\sin C=3\sin B$及正弦定理，得$c=3b$，与$bc=b+c$联立，解得$b=\frac{4}{3}$，$c=4$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{4\sqrt3}{3}$.

17. 解：(1)调查的男生人数为 $100\times55\%=55$(人)，

调查的女生人数为 $100-55=45$(人)． ………………………………………………………… 2分

补全 2×2 列联表如下：

	喜欢数学	不喜欢数学	合计
男生	40	15	55
女生	20	25	45
合计	60	40	100

…… 6分

(2) $K^2=\dfrac{100\times(40\times25-15\times20)^2}{60\times40\times55\times45}\approx8.249>7.879$， ……………………………………… 10分

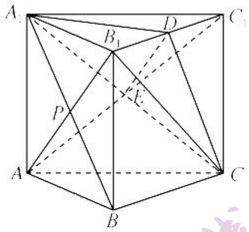
所以有99.5%的把握认为该校学生喜欢数学与学生的性别有关． …………………………… 12分

18. (1)证明：连接 AC_1 交 A_1C 于点 E，连接 DE，则 E 为 AC_1 的中点， ………………………… 1分

又 D 为 B_1C_1 的中点，所以 $DE/\!/AB_1$． …………………………………………………… 2分

因为 $DE\subset$平面 A_1CD，$AB_1\not\subset$平面 A_1CD，所以 $AB_1/\!/$平面 A_1CD． ………………………… 4分

(2)解：由(1)知 $AB_1/\!/$平面 A_1CD，且 $P\in AB_1$，故点 P 到平面 A_1CD 的距离等于点 B_1 到平面 A_1CD 的距离，设为 d． …………………………………………………… 5分



因为 $A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1=2$，$AA_1=\sqrt{3}$，所以 $A_1D=\sqrt{3}$，$CD=2$，$A_1C=\sqrt{7}$， ………… 7分

所以 $A_1D^2+CD^2=A_1C^2$，所以 $\angle A_1DC=90^\circ$，所以 $\triangle A_1CD$ 的面积为 $\sqrt{3}$． …………… 8分

连接 B_1C，则三棱锥 $C-A_1B_1D$ 的体积 $V_1=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times2\times1\times\sin60^\circ\times\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}$，…… 10分

又三棱锥 B_1-A_1CD 的体积等于三棱锥 $C-A_1B_1D$ 的体积，

所以 $\dfrac{1}{3}\times\sqrt{3}d=\dfrac{1}{2}$，所以 $d=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以点 P 到平面 A_1CD 的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$． ……………………… 12分

19. (1)解：因为 $\forall n\geqslant2$，$a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n$，

所以当 $n\geqslant3$，$a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-2}a_{n-2}=a_{n-1}$， …………………………………… 1分

两式相减，得 $\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}=a_n-a_{n-1}$，即 $\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}=a_n$． ……………………………………… 2分

当 $n=2$ 时，$a_2=a_1=1$，

所以当 $n\geqslant3$ 时，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}$， ………………………………………………………… 3分

所以当 $n\geqslant3$ 时，$a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\times\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\times\cdots\times\dfrac{a_3}{a_2}\times a_2=\dfrac{n}{n-1}\times\dfrac{n-1}{n-2}\times\cdots\times\dfrac{3}{2}\times1=\dfrac{n}{2}$． ……………… 4分

当 $n=2$ 时，上式成立；当 $n=1$ 时，上式不成立， ………………………………………… 5分

所以 $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \dfrac{n}{2}, n\geqslant2.\end{cases}$ …………………………………………………………… 6分

(2)证明：由(1)知 $b_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \dfrac{4}{n(n+1)}, n\geq 2,\end{cases}$ ……………… 7分

当 $n\geq 2$ 时，$b_n=\dfrac{4}{n(n+1)}=4\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$， ……………… 9分

所以当 $n=1$ 时，$S_1=1<3$； ……………… 10分

当 $n\geq 2$ 时，$S_n=1+4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+4\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+4\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=1+4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=1+4\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}\right)=3-\dfrac{4}{n+1}<3.$

综上，$S_n<3$. ……………… 12分

20. 解：(1) $f'(x)=x^2-(a+2)x+2a$， ……………… 1分

由题意得 $f'(4)=16-4(a+2)+2a=0$， ……………… 2分

解得 $a=4$. ……………… 3分

当 $a=4$ 时，$f'(x)=x^2-6x+8=(x-4)(x-2)$，

当 $x<2$ 时，$f'(x)>0$；当 $2<x<4$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>4$ 时，$f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$ 和 $(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $(2,4)$ 上单调递减，

所以 $x=4$ 是 $f(x)$ 的极小值点. ……………… 5分

(2)法一：$f'(x)=x^2-(a+2)x+2a=(x-a)(x-2)$. ……………… 6分

①当 $a\leq 1$ 时，$x-a>0$，$x-2<0$，所以 $f'(x)<0$，从而 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上为减函数，

由 $\begin{cases}f(1)=\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{3}>0,\\ f(2)=2a-\dfrac{1}{3}<0,\end{cases}$ 解得 $-\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{6}$，

所以当 $-\dfrac{2}{9}<a<\dfrac{1}{6}$ 时，$f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有一个零点. ……………… 8分

②当 $a\geq 2$ 时，$x-a<0$，$x-2<0$，所以 $f'(x)>0$，从而 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 上为增函数，

所以 $f(x)>f(1)=\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{3}\geq\dfrac{3}{2}\times 2+\dfrac{1}{3}>0$，

此时，$f(x)$ 在 $(1,2)$ 内没有零点. ……………… 10分

③当 $1<a<2$ 时，$x-2<0$，当 $1<x<a$ 时，$f'(x)>0$；当 $a<x<2$ 时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(1,a)$ 上为增函数，在 $(a,2)$ 上为减函数，

又 $f(1)=\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{3}>0$，$f(2)=2a-\dfrac{1}{3}>2-\dfrac{1}{3}>0$，

所以，此时 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内没有零点，

综上，实数 a 的取值范围为 $\left(-\dfrac{2}{9},\dfrac{1}{6}\right)$. ……………… 12分

法二：考虑到 $f(x)$ 在 $(1,2)$ 内有零点，令 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{a+2}{2}x^2+2ax+1=0$， ……………… 6分

整理，得 $\left(\dfrac{x^2}{2}-2x\right)a=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+1$.

由 $1<x<2$，得 $\frac{x^2}{2}-2x=\frac{1}{2}x(x-4)<0$，所以 $\frac{3}{2}a=\frac{x^3-3x^2+3}{x^2-4x}$. …………………………………… 8分

设 $g(x)=\frac{x^3-3x^2+3}{x^2-4x}(1<x<2)$，则 $g'(x)=\frac{(x-2)(x^3-6x^2-6)}{(x^2-4x)^2}$. …………………………………… 9分

设 $h(x)=x^3-6x^2-6(1<x<2)$，则 $h'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(1,2)$ 上为减函数，从而 $h(x)<h(1)=-11<0$，…………………………………… 10分

所以 $g'(x)>0$，从而 $g(x)$ 在 $(1,2)$ 上为增函数，…………………………………… 11分

又 $g(1)=-\frac{1}{3}$，$g(2)=-\frac{1}{4}$，

所以 $g(x)$ 的值域为 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{4}\right)$，于是 $-\frac{1}{3}<\frac{3}{2}a<\frac{1}{4}$，即 $-\frac{2}{9}<a<\frac{1}{6}$，

故实数 a 的取值范围为 $\left(-\frac{2}{9},\frac{1}{6}\right)$. …………………………………… 12分

21.（1）解：设 $|F_1F_2|=2c$，因为两个焦点和短轴的两个端点为正方形的四个顶点，所以 $b=c$，

因为点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 在 E 上，所以 $\frac{2}{4a^2}+\frac{3}{4b^2}=1$，又 $a^2=b^2+c^2$，…………………………………… 2分

解得 $a^2=2$，$b^2=1$，

所以 E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………………… 4分

（2）证明：由（1）知 $F_2(1,0)$，由题意知直线 AB 和直线 CD 的斜率都存在且不为 0，设直线 AB 方程为：$x=my+1$，与 E 的方程联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{2}+y^2=1,\\ x=my+1,\end{cases}$

消去 x 并整理，得 $(m^2+2)y^2+2my-1=0$，…………………………………… 5分

且 $\Delta=4m^2+4(m^2+2)>0$，

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+2}$，所以 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+2=\frac{4}{m^2+2}$，

所以点 M 的坐标为 $\left(\frac{2}{m^2+2},-\frac{m}{m^2+2}\right)$，

因为 $AB\perp CD$，则直线 CD 的方程为 $x=-\frac{1}{m}y+1$，

同理得 $N\left(\frac{2m^2}{2m^2+1},\frac{m}{2m^2+1}\right)$，…………………………………… 6分

当 $\frac{2m^2}{2m^2+1}\neq\frac{2}{m^2+2}$，即 $m\neq\pm1$ 时，直线 MN 的斜率 $k_{MN}=\frac{\frac{m}{2m^2+1}+\frac{m}{m^2+2}}{\frac{2m^2}{2m^2+1}-\frac{2}{m^2+2}}=\frac{3m}{2(m^2-1)}$，

所以直线 MN 的方程为 $y+\frac{m}{m^2+2}=\frac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\frac{2}{m^2+2}\right)$，…………………………………… 8分

所以 $y=\frac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\frac{2}{m^2+2}\right)-\frac{m}{m^2+2}=\frac{3m}{2(m^2-1)}\left[x-\frac{2}{m^2+2}-\frac{2(m^2-1)}{3(m^2+2)}\right]$，

因为 $\frac{2}{m^2+2}+\frac{2(m^2-1)}{3(m^2+2)}=\frac{6+2(m^2-1)}{3(m^2+2)}=\frac{2(m^2+2)}{3(m^2+2)}=\frac{2}{3}$，

所以直线 MN 的方程即为 $y=\frac{3m}{2(m^2-1)}\left(x-\frac{2}{3}\right)$，显然直线 MN 过定点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$；……………………………… 10分

当 $\frac{2m^2}{2m^2+1}=\frac{2}{m^2+2}$，即 $m=\pm1$ 时，则 $M\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，$N\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$ 或 $M\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，$N\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$，

此时直线 MN 的方程为 $x=\frac{2}{3}$，也过点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$. ……………………………… 11分

综上所述，直线 MN 过定点 $\left(\frac{2}{3},0\right)$. ……………………………… 12分

22. 解：(1)在 C_1 的参数方程中消去参数 α，得 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2+y^2=4$；……………… 2分

由 $\rho\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=m$ 得 $\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta=m$，……………………………… 4分

又 $\rho\cos\theta=x$，$\rho\sin\theta=y$，所以 C_2 的直角坐标方程为 $x-y-\sqrt{2}m=0$. ……………… 5分

(2)由(1)知曲线 C_1 是以 $(1,0)$ 为圆心，2 为半径的圆，曲线 C_2 为直线，……………… 6分

则圆心 $(1,0)$ 到曲线 C_2 的距离 $d=\frac{|1-\sqrt{2}m|}{\sqrt{2}}$，……………………………… 7分

因为 $|AB|=2\sqrt{3}$，所以 $\left(\frac{|1-\sqrt{2}m|}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)^2=2^2$，……………………………… 8分

解得 $m=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$，或 $m=\frac{-2+\sqrt{2}}{2}$. ……………………………… 10分

23. 证明：(1)法一：因为 $a>0,b>0$，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+4ab+4ab\geq4\sqrt[4]{\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{b^2}\cdot4ab\cdot4ab}=8$. ……………… 3分

当且仅当 $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}=4ab$，即 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立. ……………………………… 4分

法二：因为 $a>0,b>0$，

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\geq\frac{2}{ab}$，当且仅当 $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{b^2}$，即 $a=b$ 时等号成立. ……………………………… 2分

所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab\geq\frac{2}{ab}+8ab\geq2\sqrt{\frac{2}{ab}\times8ab}=8$，当且仅当 $\frac{2}{ab}=8ab$，即 $ab=\frac{1}{2}$ 时，等号成立. ……………… 3分

综上，$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+8ab\geq8$，当且仅当 $a=b=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，等号成立. ……………………………… 4分

(2)因为 $a^2b^2+b^2c^2\geq2ab^2c$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立；

$b^2c^2+c^2a^2\geq2abc^2$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立；

$c^2a^2+a^2b^2\geq2a^2bc$，当且仅当 $b=c$ 时等号成立，……………………………… 7分

所以 $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\geq2abc(a+b+c)$，当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立. ……………… 8分

因为 $a>0,b>0,c>0$，所以 $a+b+c>0$，……………………………… 9分

所以 $\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a+b+c}\geq abc$. ……………………………… 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。