

2023 年普通高等学校招生全国统一考试模拟演练

数 学

本试卷共 4 页，满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

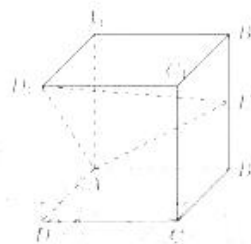
一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x \subseteq B\}$ ， $B = \{1, 2, 3\}$ ，则 $A \cap B =$

- A. \emptyset B. $\{\emptyset\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{\emptyset, \{1, 2, 3\}\}$

2. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E 在线段 BB_1 上运动，则下列直线与平面 AD_1E 的夹角为定值的是

- A. B_1C
B. BC_1
C. A_1C
D. AC_1

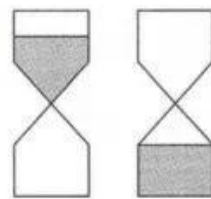


3. 若需要刻画预报变量 w 和解释变量 x 的相关关系，且从已知数据中知道预报变量 w 随着解释变量 x 的增大而减小，并且随着解释变量 x 的增大，预报变量 w 大致趋于一个确定的值，为拟合 w 和 x 之间的关系，应使用以下回归方程中的 ($b > 0$, e 为自然对数的底数)

- A. $w = bx + a$ B. $w = -b \ln x + a$ C. $w = -b\sqrt{x} + a$ D. $w = be^{-x} + a$

4. 有一个沙漏如图所示，由圆柱与圆锥组合而成，上下对称，沙漏中沙子完全流下刚好填满下半部分的圆柱部分，已知沙漏总高度为 10 cm，圆柱部分高度为 2 cm，则初始状态的沙子高度 h 为

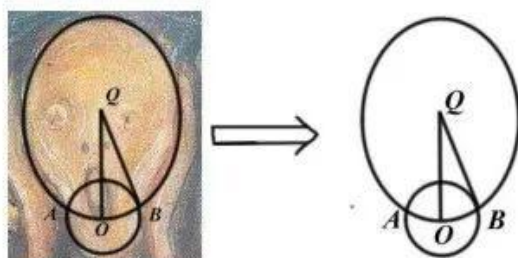
- A. 3 cm B. 3.5 cm
C. 4 cm D. 4.5 cm



5. 已知 α, β 都是锐角，且 $3\sin^2 \alpha + 2\sin^2 \beta = 1$ ， $3\sin 2\alpha - 2\sin 2\beta = 0$ ，则 α, β 满足的关系是

- A. $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ B. $\alpha - \beta = \frac{\pi}{4}$ C. $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$ D. $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$

6. 挪威画家爱德华·蒙克于 1893 年创作的《呐喊》是表现主义绘画的代表作品，刻画了一个极其痛苦的表情。画作局部如下图所示，人像的脸近似为一个椭圆，下巴近似为一个圆，圆心 O 在椭圆的下焦点上，椭圆与圆有两个交点 A, B ，椭圆的两焦点与圆的圆心在同一直线上，记椭圆的中心为 Q 。连接直线 QB, OB, OQ ，经测量发现 BQ 与圆 O 相切，圆的半径为 1cm ， $BQ = 2\sqrt{2}\text{cm}$ 。记该椭圆的离心率为 e ， $[x]$ 为不超过 x 的最大整数，则 $\left[\frac{3}{e}\right]$ 的值为

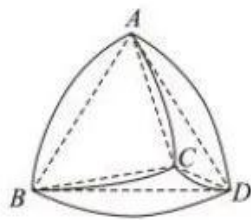


- A. 2 B. 4 C. 6 D. 8
7. 正八边形 $ABCDEFGH$ 上存在一动点 P (点 P 与 A, C 不重合)，已知正八边形边长为 2，则 $AC \cdot AP$ 的最大值为
- A. $2 + \sqrt{2}$ B. $6 + 4\sqrt{2}$ C. $6 + 6\sqrt{2}$ D. $8 + 6\sqrt{2}$
8. 设函数 $f(x) = 2x - \cos x$ ， $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{\pi}{8}$ 的等差数列， $f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_5) = 5\pi$ ，则 $f^2(a_3) - a_1 a_5 =$
- A. 0 B. $\frac{\pi^2}{16}$ C. $\frac{\pi^2}{8}$ D. $\frac{13\pi^2}{16}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 投掷一枚均匀的骰子 8 次，记录每次骰子出现的点数。根据统计结果，可以判断一定出现点数 6 的是来源：高三答案公众号
- A. 第 25 百分位数为 2，极差为 4 B. 平均数为 3.5，第 75 百分位数为 3.5
- C. 平均数为 3，方差为 3 D. 众数为 4，平均数为 4.75
10. 已知函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别为奇函数和偶函数，且 $f(x) + g(x) = 2^x$ ，则
- A. $f(x) - g(x) = 2^{-x}$ B. $f(x)$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增
- C. $f(x)$ 的导函数 $f'(x) \geq 1$ D. $g(x) \geq 1$
11. 已知 $ae^b < be^a < -e^{a+b+1}$ ， e 是自然对数的底数，则
- A. $a < b < -2$ B. $\frac{a}{b} > 1$ C. $ab + a + b > -1$ D. $ae^a < be^b$

12. 勒洛四面体是一个非常神奇的“四面体”，它能在两个平行平面间自由转动，并且始终保持与两平面都接触. 勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的相交部分围成的几何体. 如图，若用棱长为4的正四面体 $ABCD$ 作勒洛四面体，则



- A. 平面 ABC 截勒洛四面体所得截面的面积为 $8\pi - 8\sqrt{3}$
 B. 记勒洛四面体上以 C, D 为球心的两球球面交线为弧 \widehat{AB} ，则其长度为 $\frac{4\pi}{3}$
 C. 该勒洛四面体表面上任意两点间距离的最大值为 4
 D. 该勒洛四面体能够容纳的最大球的半径为 $4 - \sqrt{6}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 i 是虚数单位，已知 $2i - 3$ 是关于 x 的方程 $2x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbf{R}$) 的一个根，则 $p + q =$ _____.

14. 平面直角坐标系中有线段 AB ，对应直观图上的线段是 $A'B'$ ，若 $|AB| = |A'B'|$ ，则 AB 的斜率为 _____.

15. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 的左、右焦点，过 F_2 的直线与双曲线 C 的右支交于 A, B 两点（其中点 A 在第一象限），设点 H, G 分别为 $\triangle AF_1F_2, \triangle BF_1F_2$ 的内心，则 $|HG|$ 的取值范围是 _____.

16. 设 $a > 0$ ，若对于任意正实数 b ，函数 $y = \sqrt{x^2 + ax + b}$ 的图象与曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 都有交点，则 a 的最小值为 _____.

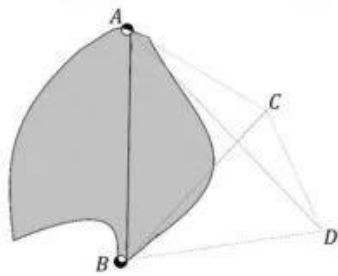
四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

为测量地形不规则的一个区域的径长 AB ，采用间接测量的方法. 如图，阴影部分为不规则地形，利用激光仪器和反光规律得到 $\angle ACB = \angle DCB$ ， $\angle ACD$ 为钝角， $AC = 5$ ， $AD = 7$ ，

$$\sin \angle ADC = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

- (1) 求 $\sin \angle ACB$ 的值；
 (2) 若测得 $\angle BDC = \angle BCD$ ，求待测径长 AB .



18. (12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $\frac{a_1}{a_2 - 1} \cdot \frac{a_2}{a_3 - 1} \cdots \frac{a_n}{a_{n+1} - 1} = n + 1$.

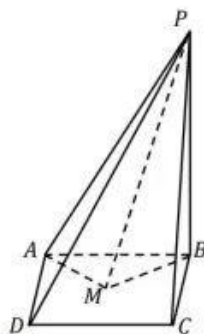
- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
 (2) 数列 $\{(-\frac{4}{5})^n a_n\}$ 中是否存在最大项和最小项？若存在，求出相应的最大项或最小项；若不存在，说明理由.

19. (12分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 内, $PB \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $AB=2$, $BP=2\sqrt{3}$. 过 P 的直线 l 交平面 $ABCD$ 于正方形 $ABCD$ 内的点 M , 且满足平面 $PAM \perp$ 平面 PBM .

(1) 当 $\angle ABM \in [\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{8}]$ 时, 求点 M 的轨迹长度;

(2) 当二面角 $M-PA-B$ 的余弦值为 $\frac{4}{5}$ 时, 求二面角 $P-MA-D$ 的余弦值.



20. (12分)

一部电视连续剧共有 $n+1$ ($n \geq 10$) 集, 某同学看了第一集后, 被该电视剧的剧情所吸引, 制定了如下的观看计划: 从看完第一集后的第一天算起, 把余下的 n 集电视剧随机分配在 $2n$ 天内; 每天要么不看, 要么看完完整的一集; 每天至多看一集. 已知这部电视剧最精彩的部分在第 n 集, 设该同学观看第一集后的第 X 天观看该集.

(1) 求 X 的分布列;

(2) 证明: 最有可能在第 $(2n-2)$ 天观看最精彩的第 n 集.

21. (12分)

已知抛物线 $C_1: y^2 = 2px$, $C_2: x^2 = 2py$ ($p > 0$) 相交于点 $(4,4)$. C_1 在第一象限内一点 P 处的切线 l 交 C_2 于 A, B 两点, 交 x 轴于点 M , C_2 在 A, B 处的切线交于点 D .

(1) 证明: 当 $\triangle ABD$ 面积最小时, P 为 AB 中点;

(2) 过 P 作 l 的垂线交 C_1 于另一点 Q , 连接 MQ 交 C_1 于另一点 R , 当 $\triangle PQR$ 面积最小时, 求点 M 的坐标.

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+a) + e^{-x} - a$, $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数.

(1) 判断 $x=0$ 是否为 $f(x)$ 的极值点, 并说明理由;

(2) 若 $1 < a < 2$, x_0 为 $f(x)$ 最小的零点, 证明: 当 $x \in (-a, 0)$ 时, $f(x) < f'(x_0)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

