线 封 密

唐山市2021-2022学年度高三年级第一学期期末考试

数　学

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡上“条形码粘贴处”。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1．已知集合$A=\{x|x^2-x-6\leqslant 0\}$，$B=\{x|y=\sqrt{x-1}\}$，则$A\cap B=$

A．$[1，2]$　　B．$[1，3]$

C．$[0，2]$　　D．$[0，3]$

2．函数$f(x)$为奇函数，$g(x)$为偶函数，在公共定义域内，下列结论一定正确的是

A．$f(x)+g(x)$为奇函数　　B．$f(x)+g(x)$为偶函数

C．$f(x)g(x)$为奇函数　　D．$f(x)g(x)$为偶函数

3．为了得到函数$y=\sin 2x$的图像，只需把函数$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$的图像

A．向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位　　B．向右平移$\frac{\pi}{2}$个单位

C．向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位　　D．向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位

4．六名志愿者到北京、延庆、张家口三个赛区参加活动，若每个赛区两名志愿者，则安排方式共有

A．15种　　B．90种

C．540种　　D．720种

5．传说古希腊毕达哥拉斯派的数学家经常在沙滩上面画点或用小石子表示数。他们将1，3，6，10，15，…，$\frac{n(n+1)}{2}$，…，称为三角形数；将1，4，9，16，25，…，n^2，…，称为正方形数。现从小于100的三角形数中，随机抽取一个数，则这个数是正方形数的概率为

A．$\frac{1}{5}$　　B．$\frac{1}{10}$

C．$\frac{1}{13}$　　D．$\frac{2}{13}$

6. 已知抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$是 C 上两点，若 $y_2^2-2y_1^2=4$，则$\frac{|AF|}{|BF|}=$

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

7. 设 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 4$，$c=\log_4 8$，则

A. $b<c<a$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

8. 已知圆柱的侧面积为 2π，其外接球的表面积为 S，则 S 的最小值为

A. 3π　　B. 4π　　C. 6π　　D. 9π

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分．

9. 已知复数 $z=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0)$，$\overline{z}$ 是 z 的共轭复数，则下列命题中的真命题是

A. $z+\overline{z}\in\mathbf{R}$　　B. $z-\overline{z}\in\mathbf{R}$　　C. $z\cdot\overline{z}\in\mathbf{R}$　　D. $\frac{\overline{z}}{z}\in\mathbf{R}$

10. 圆 M：$x^2+y^2+2x-4y+3=0$ 关于直线 $2ax+by+6=0$ 对称，记点 $P(a,b)$，下列结论正确的是

A. 点 P 的轨迹方程为 $x-y-3=0$

B. 以 PM 为直径的圆过定点 $Q(2,-1)$

C. $|PM|$ 的最小值为 6

D. 若直线 PA 与圆 M 切于点 A，则 $|PA|\geq 4$

11. 为排查新型冠状病毒肺炎患者，需要进行核酸检测．现有两种检测方式：（1）逐份检测；（2）混合检测：将其中 k 份核酸分别取样混合在一起检测，若检测结果为阴性，则这 k 份核酸全为阴性，因而这 k 份核酸只要检测一次就够了，如果检测结果为阳性，为了明确这 k 份核酸样本究竟哪几份为阳性，就需要对这 k 份核酸再逐份检测，此时，这 k 份核酸的检测次数总共为 $k+1$ 次．假设在接受检测的核酸样本中，每份样本的检测结果是阴性还是阳性都是独立的，并且每份样本是阳性的概率都为 p（$0<p<1$），若 $k=10$，运用概率统计的知识判断下列哪些 p 值能使得混合检测方式优于逐份检测方式．（参考数据：$\lg 0.794\approx -0.1$）

A. 0.4　　B. 0.3　　C. 0.2　　D. 0.1

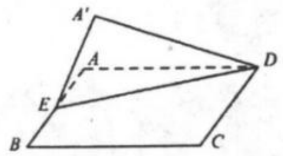
12. 如图，四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，E 为 AB 的中点，将△AED 沿 DE 所在的直线翻折，使 A 与 A' 重合，得到四棱锥 $A'-BCDE$，则在翻折的过程中

A. $DE\perp AA'$

B. 存在某个位置，使得 $A'E\perp CD$

C. 存在某个位置，使得 $A'B/\!/DE$

D. 存在某个位置，使四棱锥 $A'-BCDE$ 的体积为 1



三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 等差数列$\{a_n\}$的公差为 2，若 a_3，a_5，a_8 成等比数列，则 a_1=______.

14. $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 的中点，$BC=4$，$AD=3$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$______.

15. 已知圆锥的母线长为 2，其侧面展开图是一个半圆，则该圆锥的体积为______.

16. 已知函数 $f(x)=x^3-ax$（$a>0$），b，c 分别是 $f(x)$的极大值点与极小值点，若 $d>b$ 且 $f(d)=f(b)$，则$\dfrac{d}{c}=$______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

记$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $a\sin A+(b-a)\sin B=c\sin C$.

（1）求角 C；

（2）求$\dfrac{a+b}{c}$的取值范围.

18. （12 分）

已知 S_n 是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$2S_n=(n+1)a_n$，且 $a_1=1$.

（1）证明：$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$为常数列；

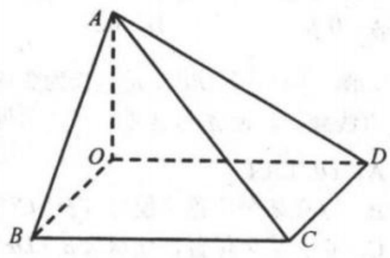
（2）若 $b_n=\dfrac{a_n\cdot 2^n}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19. （12 分）

如图，四棱锥 A–$OBCD$ 的底面是矩形，$AO\perp BC$，侧面 $AOD\perp$底面 $OBCD$.

（1）求证：$AO\perp$底面 $OBCD$；

（2）若 $OB=OD=1$，二面角 B–AC–D 的大小为 120°，求四棱锥 A–$OBCD$ 的体积.



20.（12分）

某统计部门依据《中国统计年鉴—2017》提供的数据，对我国1997—2016年的国内生产总值（GDP）进行统计研究，作出了两张散点图：图1表示1997—2016年我国的国内生产总值（GDP），图2表示2007—2016年我国的国内生产总值（GDP）.

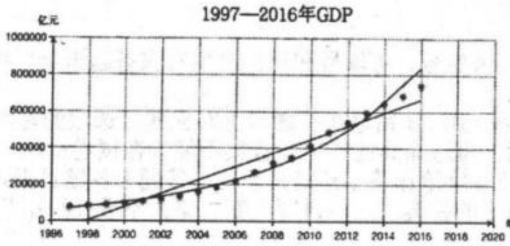


图1

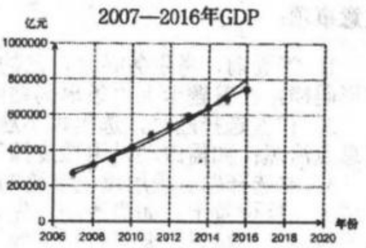


图2

（1）用 r_i（$i=1$，2）表示第 i 张图中的年份与GDP的线性相关系数，$r_i\in\{0.9647，0.9980\}$，依据散点图的特征分别写出 r_i 的结果；

（2）分别用线性回归模型和指数回归模型对两张散点图进行回归拟合，分别计算出统计数据——相关指数 R^2 的数值，部分结果如下表所示：

年份	1997—2016	2007—2016
线性回归模型	0.9306	
指数回归模型	0.9899	0.978

①将上表中的数据补充完整（结果保留3位小数，直接写在答题卡上）；

②若估计2017年的GDP，结合数据说明采用哪张图中的哪种回归模型会更精准一些？若按此回归模型来估计，2020年的GDP能否突破100万亿元？事实上，2020年的GDP刚好突破了100万亿元，估计与事实是否吻合？结合散点图解释说明.

21.（12分）

已知圆 O：$x^2+y^2=4$，点 M 是圆 O 上任意一点，M 在 x 轴上的射影为 N，点 P 满足 $\overrightarrow{NP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{NM}$，记点 P 的轨迹为 E.

（1）求曲线 E 的方程；

（2）已知 $F(1，0)$，过 F 的直线 m 与曲线 E 交于 A，B 两点，过 F 且与 m 垂直的直线 n 与圆 O 交于 C，D 两点，求 $|AB|+|CD|$ 的取值范围.

22.（12分）

过点 $P(a，b)$ 可以作出曲线 $y=\ln x$ 的两条切线，切点分别为 A，B 两点.

（1）证明：$0<a<e^b$；

（2）线段 AB 的中点 M 的横坐标为 x_0，比较 x_0 与 a 的大小关系.

唐山市 2021—2022 学年度第一学期高三年级期末考试

数学参考答案

一．选择题：

1－4　BCDB　　5－8　DAAB

二．选择题：

9．AC　　10．ABD　　11．CD　　12．AB

三．填空题：

13．4　　14．5　　15．$\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$　　16．2

四．解答题：

17．解：

（1）由已知及正弦定理得　$a^2+b^2-ab=c^2$，

即 $a^2+b^2-c^2=ab$，由余弦定理得

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{1}{2}$，可得 $C=\frac{\pi}{3}$.

（2）根据正弦定理得

$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin B)$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A+\sin(A+\frac{\pi}{3}))$

$=\frac{2}{\sqrt{3}}(\frac{3}{2}\sin A+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A)$

$=2\sin(A+\frac{\pi}{6})$，

又 $0<A<\frac{2\pi}{3}$，则 $\frac{\pi}{6}<A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$

故 $1<2\sin(A+\frac{\pi}{6})\leqslant 2$，

则 $\frac{a+b}{c}$ 的取值范围是 $(1,2]$

18．解：

（1）由已知得 $2(a_1+a_2)=3a_2$，即 $a_2=2$，

$n\geqslant 2$ 时，由 $2S_n=(n+1)a_n$，$2S_{n-1}=na_{n-1}$，两式相减得 $(n-1)a_n=na_{n-1}$，

则 $\frac{a_n}{n}=\frac{a_{n-1}}{n-1}=\cdots=\frac{a_2}{2}=\frac{2}{2}=1$，又 $\frac{a_1}{1}=1$

于是 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为常数列.

（2）由（1）得 $a_n=n$.

则 $b_n=\dfrac{a_n\cdot 2^n}{a_{n+1}\cdot a_{n+2}}=\dfrac{n\cdot 2^n}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^n}{n+1}$,

故 $T_n=\left(\dfrac{2^2}{3}-\dfrac{2^1}{2}\right)+\left(\dfrac{2^3}{4}-\dfrac{2^2}{3}\right)+\cdots+\left(\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-\dfrac{2^n}{n+1}\right)=\dfrac{2^{n+1}}{n+2}-1$.

19．**解：**

（1）

因为四棱锥 $A-OBCD$ 的底面是矩形，

所以 $BC\,/\!/\,OD$，

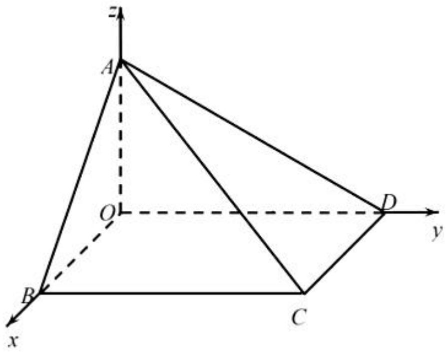
又因为 $AO\perp BC$，所以 $AO\perp OD$，

因为侧面 $AOD\perp$ 底面 $OBCD$，

侧面 $AOD\cap$ 底面 $OBCD=OD$，

$AO\subset$ 侧面 AOD，

所以 $AO\perp$ 底面 $OBCD$.



（2）因为 $AO\perp$ 底面 $OBCD$，$OBCD$ 为矩形，所以 OA，OB，OD 两两垂直.

如图，以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴正方向，$\overrightarrow{OD}$ 的方向为 y 轴正方向，

建立空间直角坐标系 $O-xyz$．则 $B(1,\ 0,\ 0)$，$D(0,\ 1,\ 0)$，

设 $A(0,\ 0,\ m)$（$m>0$），则 $\overrightarrow{BA}=(-1,\ 0,\ m)$，$\overrightarrow{BC}=(0,\ 1,\ 0)$，

$\overrightarrow{DA}=(0,\ -1,\ m)$，$\overrightarrow{DC}=(1,\ 0,\ 0)$，

设 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,\ y_1,\ z_1)$ 为平面 ABC 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1+mz_1=0,\\ y_1=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}_1=(m,\ 0,\ 1)$.

设 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 为平面 ACD 的法向量，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{DC}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-y_2+mz_2=0,\\ x_2=0.\end{cases}$

可取 $\boldsymbol{n}_2=(0,\ m,\ 1)$.

由题设 $|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\ \boldsymbol{n}_2\rangle|=\dfrac{1}{2}$，即 $\dfrac{1}{1+m^2}=\dfrac{1}{2}$，解得 $m=1$ 或 $m=-1$（舍）.

所以四棱锥 A-$OBCD$ 的高为 1，四棱锥 $A-OBCD$ 的体积

$V=\dfrac{1}{3}\times1\times1\times1=\dfrac{1}{3}$.

20．**解：**

（1）$r_1=0.9647$，$r_2=0.9980$.

（2）

①0.996.

②由图 2 中的线性回归模型得到的相关指数为 0.996，是所有回归模型的相关指数中数值最大的，而且 2017 年是最近的年份，因此选择图 2 中的线性回归模型来估计 2017 年的 GDP，是比较精准的.

按照图 2 中的线性回归模型来估计（延长回归直线可发现），2020 年不能突破 100 万亿元.

估计与事实不吻合．综合两张图来考虑，我国的 GDP 随年份的增长整体上呈现指数增长的趋势，而且 2020 年比 2016 年又多发展了 4 年，指数回归趋于明显，因此，按照线性回归模型得到的估计值与实际数据有偏差、不吻合，属于正常现象.

21．**解：**

（1）设点 $P(x,y)$，由 $\overrightarrow{NP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{NM}$，得 $M\left(x,\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)$，

由点 M 在圆 O 上，所以 $x^2+\left(\frac{2y}{\sqrt{3}}\right)^2=4$，

整理得 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，

所以曲线 E 的方程是 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（2）当直线 m 的斜率为 0 时，$|AB|=4$，$|CD|=2\sqrt{3}$，$|AB|+|CD|=4+2\sqrt{3}$，
当直线 m 的斜率不存在时，$|AB|=3$，$|CD|=4$，$|AB|+|CD|=7$，
当直线 m 的斜率存在且不为 0 时，设 m：$y=k(x-1)$，则 n：$y=-\frac{1}{k}(x-1)$

点 O 到直线 n 的距离 $d=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$，

所以 $|CD|=2\sqrt{4-d^2}=2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$，

将 $y=k(x-1)$ 代入曲线 E 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，整理得

$(4k^2+3)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，
设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{4k^2+3}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{4k^2+3}$，

则 $|AB|=\sqrt{k^2+1}\,|x_1-x_2|=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$，

所以 $|AB|+|CD|=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}+2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}}$，

令 $t=\sqrt{\dfrac{4k^2+3}{k^2+1}}=\sqrt{4-\dfrac{1}{k^2+1}}\in(\sqrt{3},\ 2)$，

则 $|AB|+|CD|=\dfrac{12}{t^2}+2t$，$t\in(\sqrt{3},\ 2)$.

令 $f(t)=\dfrac{12}{t^2}+2t$，$t\in(\sqrt{3},\ 2)$，

则 $f'(t)=2-\dfrac{24}{t^3}<0$，

所以 $f(t)$ 在 $(\sqrt{3},\ 2)$ 上单调递减，

所以 $f(t)\in(7,\ 4+2\sqrt{3})$，即 $|AB|+|CD|\in(7,\ 4+2\sqrt{3})$.

综上所述，$|AB|+|CD|$ 的取值范围是 $[7,\ 4+2\sqrt{3}]$.

22．**解：**

（1）令 $y=f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$，设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$\dfrac{b-\ln x_1}{a-x_1}=\dfrac{1}{x_1}$，$\dfrac{b-\ln x_2}{a-x_2}=\dfrac{1}{x_2}$，则方程 $\ln x+\dfrac{a}{x}-b-1=0$ 有两根 x_1，x_2.

令 $g(x)=\ln x+\dfrac{a}{x}-b-1$，则 $g(x)$ 有两个零点.

若 $a\leq 0$，则 $g(x)$ 单调递增，至多一个零点，不合题意.

因此，$a>0$．此时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{x-a}{x^2}$，$x>0$.

当 $x\in(0,\ a)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(a,\ +\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

当 $x=a$ 时，$g(x)$ 取得最小值 $g(a)=\ln a-b$，

若要使 $g(x)$ 有两个零点，则需 $g(a)<0$，即 $\ln a<b$.

综上所述，$0<a<e^b$.

（2）依题设，只需比较 x_1+x_2 与 $2a$ 的大小关系.

由（1）知：$\ln x_1+\dfrac{a}{x_1}-b-1=0$，$\ln x_2+\dfrac{a}{x_2}-b-1=0$，

两式相减，得 $\ln x_2-\ln x_1=\dfrac{a}{x_1}-\dfrac{a}{x_2}=\dfrac{a(x_2-x_1)}{x_1x_2}$，即 $a=\dfrac{x_1x_2\cdot\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$，

则 $2a-(x_1+x_2)=\dfrac{2x_1x_2\cdot\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}-(x_1+x_2)=\dfrac{x_1x_2}{x_2-x_1}\cdot\left(2\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}\right)$，

不妨设 $x_2>x_1>0$，则 $\dfrac{x_1x_2}{x_2-x_1}>0$，

取 $t=\dfrac{x_2}{x_1}$，则 $t>1$，$2\ln\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}=2\ln t+\dfrac{1}{t}-t$，

令 $g(t)=2\ln t+\dfrac{1}{t}-t$，$t>1$，则 $g'(t)=\dfrac{2}{t}-\dfrac{1}{t^2}-1=-\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2<0$，

于是 $g(t)$ 在 $(1,\ +\infty)$ 为减函数，$g(t)<g(1)=0$，

故 $2a-(x_1+x_2)<0$，即 $x_0>a$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。