

# 高三年级五月份联考 数学(文科)

考生注意:

- 1.本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分.考试时间 120 分钟.
- 2.请将各题答案填在试卷后面的答题卡上.
- 3.本试卷主要考试内容:高考全部内容.

## 第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.复数  $z=i^9(-1-2i)$  的共轭复数为

A.  $2+i$  B.  $2-i$  C.  $-2+i$  D.  $-2-i$

2.设集合  $A=\{a,a+1\}$ ,  $B=\{1,2,3\}$ ,若  $A \cup B$  的元素个数为 4,则  $a$  的取值集合为

A.  $\{0\}$  B.  $\{0,3\}$  C.  $\{0,1,3\}$  D.  $\{1,2,3\}$

3.设双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的实轴长与焦距分别为 2,4,则双曲线  $C$  的渐近线方程为

A.  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$  B.  $y = \pm \frac{1}{3}x$  C.  $y = \pm \sqrt{3}x$  D.  $y = \pm 3x$

4.按文献记载,《百家姓》成文于北宋初年,表 1 记录了《百家姓》开头的 24 大姓氏:

表 1

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 赵 | 钱 | 孙 | 李 | 周 | 吴 | 郑 | 王 | 冯 | 陈 | 褚 | 卫 |
| 蒋 | 沈 | 韩 | 杨 | 朱 | 秦 | 尤 | 许 | 何 | 吕 | 施 | 张 |

表 2 记录了 2018 年中国人口最多的前 25 大姓氏:

表 2

|      |      |      |      |      |
|------|------|------|------|------|
| 1:李  | 2:王  | 3:张  | 4:刘  | 5:陈  |
| 6:杨  | 7:赵  | 8:黄  | 9:周  | 10:吴 |
| 11:徐 | 12:孙 | 13:胡 | 14:朱 | 15:高 |
| 16:林 | 17:何 | 18:郭 | 19:马 | 20:罗 |

21:梁

22:宋

23:郑

24:谢

25:韩

从《百家姓》开头的 24 大姓氏中随机选取 1 个姓氏,则该姓氏是 2018 年中国人口最多的前 24 大姓氏的概率为

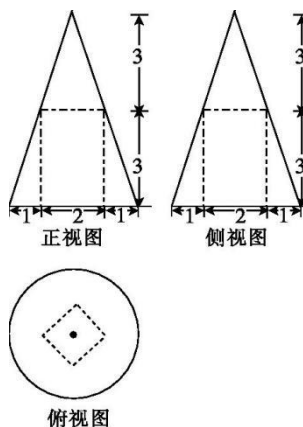
A.  $\frac{5}{12}$  B.  $\frac{11}{24}$  C.  $\frac{13}{24}$  D.  $\frac{1}{2}$

5. 函数  $f(x) = \begin{cases} 6^x - 2, & x > 0, \\ x + \log_6 12, & x \leq 0 \end{cases}$  的零点之和为

A. -1 B. 1 C. -2 D. 2

6. 函数  $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$  的单调递增区间为

A.  $[\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$



B.  $[\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$

C.  $[-\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$

D.  $[-\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}] (k \in \mathbb{Z})$

7. 某几何体的三视图如图所示,则该几何体的体积为

A.  $24\pi - 6$

B.  $8\pi - 6$

C.  $24\pi + 6$

D.  $8\pi + 6$

8. 已知两个单位向量  $e_1, e_2$  的夹角为  $60^\circ$ , 向量  $m = te_1 + 2e_2 (t < 0)$ , 则

A.  $\frac{|m|}{t}$  的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  B.  $\frac{|m|}{t}$  的最小值为 -2

C.  $\frac{|m|}{t}$  的最小值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  D.  $\frac{|m|}{t}$  的最大值为 -2

9. 若直线  $y = kx - 2$  与曲线  $y = 1 + 3\ln x$  相切, 则  $k =$

A. 2 B.  $\frac{1}{3}$  C. 3 D.  $\frac{1}{2}$

10. 已知不等式组  $\begin{cases} x-1 \geq 0, \\ kx-y \leq 0, \\ x+\sqrt{3}y-3\sqrt{3} \leq 0 \end{cases}$  表示的平面区域为等边三角形, 则  $z=x+3y$  的最小值为

A.  $2+3\sqrt{3}$  B.  $1+3\sqrt{3}$  C.  $2+\sqrt{3}$  D.  $1+\sqrt{3}$

11. 若函数  $f(x)=a \cdot (\frac{1}{3})^x (\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$  的值域是函数  $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x+1} (x \in \mathbb{R})$  的值域的子集, 则正数  $a$  的取值范围为

A.  $(0, 2]$  B.  $(0, 1]$  C.  $(0, 2\sqrt{3}]$  D.  $(0, \sqrt{3}]$

12.  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ . 已知  $10\sin A - 5\sin C = 2\sqrt{6}$ ,  $\cos B = \frac{1}{5}$ , 则  $\frac{c}{a} =$

A.  $\frac{6}{7}$  B.  $\frac{7}{6}$  C.  $\frac{5}{6}$  D.  $\frac{6}{5}$

## 第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 某中学将从甲、乙、丙 3 人中选一人参加全市中学男子 1500 米比赛, 现将他们最近集训中的 10 次成绩(单位: 秒)的平均数与方差制成如下表格:

|     | 甲   | 乙   | 丙   |
|-----|-----|-----|-----|
| 平均数 | 280 | 280 | 290 |
| 方差  | 20  | 16  | 16  |

根据表中的数据, 该中学应选     ▲     参加比赛.

14. 已知  $\tan(\alpha + \frac{\pi}{4}) = 6$ , 则  $\tan \alpha =$      ▲    .

15. 四棱锥  $P-ABCD$  的每个顶点都在球  $O$  的球面上,  $PA$  与矩形  $ABCD$  所在平面垂直,  $AB=3$ ,  $AD=\sqrt{3}$ , 球  $O$  的表面积为  $13\pi$ , 则线段  $PA$  的长为     ▲    .

16. 斜率为  $k(k < 0)$  的直线  $l$  过点  $F(0, 1)$ , 且与曲线  $y = \frac{1}{4}x^2 (x \geq 0)$  及直线  $y = -1$  分别交于  $A, B$  两点,

若  $|FB| = 6|FA|$ , 则  $k =$      ▲    .

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题, 每道试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答.

(一) 必考题: 共 60 分.

17. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = 0$ , 且  $a_1 = \frac{1}{2}$ .

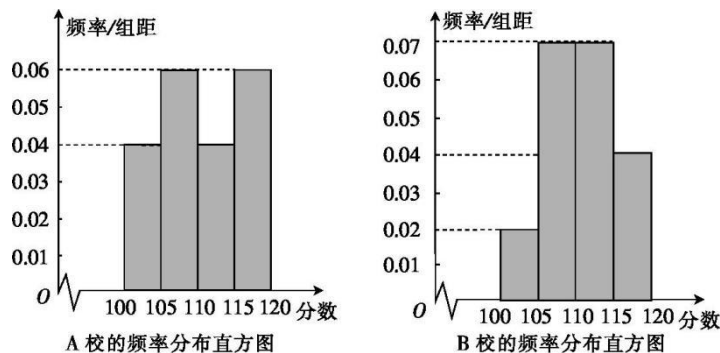
(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求数列  $\{\frac{1}{a_n} + 2n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

18. (12 分)

某市 A, B 两校组织了一次英语笔试(总分 120 分)联赛, 两校各自挑选了英语笔试成绩最好的

100 名学生参赛,成绩不低于 115 分定义为优秀.赛后统计了所有参赛学生的成绩(都在区间  $[100,120]$  内),将这些数据分成 4 组:  $[100,105)$ ,  $[105,110)$ ,  $[110,115)$ ,  $[115,120]$ . 得到如下两个频率分布直方图:



(1) 分别计算 A, B 两校联赛中的优秀率;

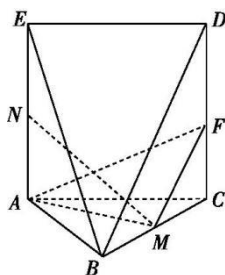
(2) 联赛结束后两校将根据学生的成绩发放奖学金, 已知奖学金  $y$  (单位: 百元) 与其成绩  $t$  的关

$$\text{系式为 } y = \begin{cases} a, & 100 \leq t < 105 \\ 1.5, & 105 \leq t < 115 \\ 2.8, & 115 \leq t \leq 120 \end{cases}$$

① 当  $a=0$  时, 试问 A, B 两校哪所学校的获奖人数更多?

② 当  $a=0.5$  时, 若以奖学金的总额为判断依据, 试问本次联赛 A, B 两校哪所学校实力更强?

19. (12 分)



如图, 在四棱锥  $B-ACDE$  中, 正方形  $ACDE$  所在平面与正  $\triangle ABC$  所在平面垂直,  $M, N$  分别为  $BC, AE$  的中点,  $F$  在棱  $CD$  上.

(1) 证明:  $MN \parallel$  平面  $BDE$ .

(2) 已知  $AB=2$ , 点  $M$  到  $AF$  的距离为  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ , 求三棱锥  $C-AFM$  的体积.

20. (12 分)

椭圆  $\frac{x^2}{m+2} + \frac{y^2}{m} = 1 (m > 1)$  的左、右顶点分别为  $A, B$ , 过点  $B$  作直线  $l$  交直线  $x=-2$  于点  $M$ , 交椭圆于另一点  $P$ .

(1) 求该椭圆的离心率的取值范围;

(2) 若该椭圆的长轴长为 4, 证明:  $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OP} = 2m$  ( $O$  为坐标原点).

21.(12 分)

已知函数  $f(x)=ax^3-x^2$ .

(1)若  $f(x)$  的一个极值点在  $(1,3)$  内,求  $a$  的取值范围;

(2)若  $a$  为非负数,求  $f(x)$  在  $[-1,2]$  上的最小值.

(二)选考题:共 10 分.请考生在第 22、23 题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分.

22.[选修 4-4:坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系  $xOy$  中,直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x=4t+a^2, \\ y=3t-1 \end{cases}$  ( $t$  为参数),圆  $C$  的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+|a|\cos\theta, \\ y=-2a^2+\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数}).$$

(1)求  $l$  和  $C$  的普通方程;

(2)将  $l$  向左平移  $m(m>0)$  个单位长度后,得到直线  $l'$ ,若圆  $C$  上只有一个点到  $l'$  的距离为 1,求  $m$ .

23.[选修 4-5:不等式选讲](10 分)

设函数  $f(x)=|x-a|+|x-4|$  ( $a \neq 0$ ).

(1)当  $a=1$  时,求不等式  $f(x)<x$  的解集;

(2)若  $f(x) \geq \frac{4}{a} - 1$  恒成立,求  $a$  的取值范围.

## 高三年级五月份联考 数学参考答案(文科)

1.A  $\because z=i^9(-1-2i)=i(-1-2i)=2-i, \therefore \bar{z}=2+i$ .

2.B  $\because a < a+1, \therefore a+1=1$  或  $a=3$ , 即  $a=0$  或  $3$ .

3.C 因为  $2a=2, 2c=4$ , 所以  $a=1, c=2, b=\sqrt{3}$ , 所以  $C$  的渐近线方程为  $y=\pm\sqrt{3}x$ .

4.D 满足条件的姓氏为赵、孙、李、周、吴、郑、王、陈、杨、朱、何、张, 共 12 个, 故所求概率为  $\frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ .

5.A 函数  $f(x)=\begin{cases} 6^x-2, & x > 0, \\ x+\log_6 12, & x \leq 0 \end{cases}$  的零点为  $\log_6 2, -\log_6 12$ ,

故零点之和为  $\log_6 2 - \log_6 12 = -\log_6 6 = -1$ .

6.A 因为  $f(x)=-\sin 3x$ , 所以只要求  $y=\sin 3x$  的递减区间. 令  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 3x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , 解得

$$\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

7.B 由三视图可知该几何体是在一个圆锥中挖掉一个长方体得到的, 其中圆锥的底面圆的半径为 2, 高为 6,

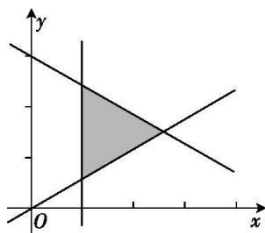
挖掉的长方体的底面是边长为  $\sqrt{2}$  的正方形, 高为 3. 故该几何体的体积为  $\frac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 6 - 2 \times 3 = 8\pi - 6$ .

8.A 因为  $t < 0$ , 所以  $\frac{|m|}{t} = \frac{\sqrt{(te_1+2e_2)^2}}{t} = \frac{\sqrt{t^2+4te_1 \cdot e_2+4}}{t} = \frac{\sqrt{t^2+2t+4}}{t}$

$$= -\sqrt{\frac{t^2+2t+4}{t^2}} = -\sqrt{\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}. \text{ 当 } \frac{2}{t} = -\frac{1}{2}, \text{ 即 } t = -4 \text{ 时, } \frac{|m|}{t} \text{ 取得最大值, 且最大值为 } -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

9.C 设切点为  $(x_0, kx_0-2)$ ,  $\therefore y' = \frac{3}{x} \therefore \begin{cases} \frac{3}{x_0} = k \text{ ①,} \\ kx_0-2 = 1+3\ln x_0 \text{ ②,} \end{cases}$  由 ① 得  $kx_0=3$ , 代入 ② 得  $1+3\ln x_0=1$ ,

则  $x_0=1, k=3$ .



10.D 依题意可得  $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , 作出不等式组表示的平面区域如图所示,

当直线  $z=x+3y$  经过点  $(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$  时,  $z$  取得最小值  $1+\sqrt{3}$ .

11.A 令  $y=g(x)$ , 则  $(y-1)x^2+yx+y+1=0$ ,

当  $y=1$  时,  $x=-2$ ; 当  $y \neq 1$  时,  $\Delta = y^2 - 4(y-1)(y+1) \geq 0$ , 则  $y^2 \leq \frac{4}{3}$ .

所以  $g(x)$  的值域为  $[-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}]$ .

因为  $a > 0$ , 所以  $f(x)$  的值域为  $[\frac{a}{3}, \frac{\sqrt{3}a}{3}]$ , 从而  $0 < \frac{\sqrt{3}a}{3} \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ , 则  $0 < a \leq 2$ .

12.C  $\because \cos B = \frac{1}{5}, \therefore \sin B = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ . 又  $10\sin A - 5\sin C = 2\sqrt{6}$ ,

$\therefore 2\sin A - \sin C = \sin B$ , 由正弦定理, 得  $2a - c = b$ ,

由余弦定理, 得  $(2a - c)^2 = a^2 + c^2 - 2ac \times \frac{1}{5}$ ,

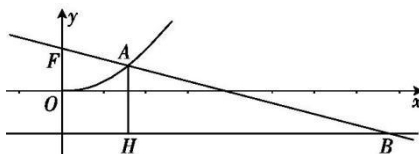
整理得  $5a = 6c$ , 即  $\frac{c}{a} = \frac{5}{6}$ .

13.乙 男子 1500 米比赛的成绩是时间越短越好的, 方差越小发挥水平越稳定, 故乙是最佳人选.

14. $\frac{5}{7}$  设  $\tan \alpha = x$ , 则  $\frac{1+x}{1-x} = 6$ , 解得  $x = \frac{5}{7}$ .

15.1 因为球  $O$  的表面积为  $13\pi$ , 所以  $4\pi(\frac{\sqrt{3+9+PA^2}}{2})^2 = 13\pi$ , 则  $PA = 1$ .

16. $\frac{\sqrt{6}}{12}$  易知曲线  $y = \frac{1}{4}x^2 (x \geq 0)$  是抛物线  $C: x^2 = 4y$  的右半部分, 如图, 其焦点为  $F(0, 1)$ , 准线为  $y = -1$ . 过  $A$  作  $AH \perp$  准线, 垂足为  $H$ , 则  $|AH| = |AF|$ , 因为  $|FB| = 6|FA|$ , 所以  $|AB| = 5|AH|$ ,  $\tan \angle ABH = \frac{|AH|}{|BH|} = \frac{1}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$ , 故直线  $l$  的斜率为  $-\frac{\sqrt{6}}{12}$ .



17.解:(1) 因为  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n} = 0$ ,

所以  $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$ , ..... 2 分

又  $a_1 = \frac{1}{2}$ ,

所以数列  $\{a_n\}$  为等比数列, 且首项为  $\frac{1}{2}$ , 公比为  $\frac{1}{2}$ , ..... 4 分

故  $a_n = (\frac{1}{2})^n$ , ..... 6 分

(2) 由(1)知  $\frac{1}{a_n} = 2^n$ , ..... 7 分

所以  $\frac{1}{a_n} + 2n = 2^n + 2n$ , ..... 8 分

所以  $S_n = \frac{2(1-2^n)}{1-2} + \frac{(2+2n)n}{2} = 2^{n+1} + n^2 + n - 2$ , ..... 12 分

18.解:(1) 由频率分布直方图知, A 校的优秀率为  $0.06 \times 5 = 0.3$ , ..... 1 分

B 校的优秀率为  $0.04 \times 5 = 0.2$ , ..... 2 分

(2) ① A 校的获奖人数为  $100 \times (1 - 0.04 \times 5) = 80$ , ..... 3 分

B 校的获奖人数为  $100 \times (1 - 0.02 \times 5) = 90$ , ..... 4 分

所以 B 校的获奖人数更多, ..... 5 分

②A 校学生获得的奖学金的总额为

$$0.2 \times 100 \times 0.5 + 0.5 \times 100 \times 1.5 + 0.3 \times 100 \times 2.8 = 169 (\text{百元}) = 16900 (\text{元}), \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

B 校学生获得的奖学金的总额为

$$0.1 \times 100 \times 0.5 + 0.7 \times 100 \times 1.5 + 0.2 \times 100 \times 2.8 = 166 (\text{百元}) = 16600 (\text{元}), \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

因为  $16900 > 16600$ , 所以 A 校实力更强.  $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

19.(1)证明:取  $BD$  的中点  $G$ , 连接  $EG, MG$ ,

$\because M$  为棱  $BC$  的中点,

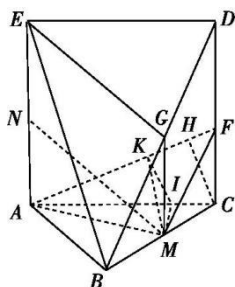
$$\therefore MG \parallel CD, \text{ 且 } MG = \frac{1}{2}CD. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

又  $N$  为棱  $AE$  的中点, 四边形  $ACDE$  为正方形,

$$\therefore EN \parallel CD, \text{ 且 } EN = \frac{1}{2}CD. \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

从而  $EN \parallel MG$ , 且  $EN = MG$ , 于是四边形  $EGMN$  为平行四边形,  $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

则  $MN \parallel EG. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$



$\because MN \not\subset \text{平面 } BDE, EG \subset \text{平面 } BDE, \therefore MN \parallel \text{平面 } BDE. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2)解:(法一)过  $M$  作  $MI \perp AC$  于  $I$ ,

$\because \text{平面 } ACDE \perp \text{平面 } ABC, \therefore MI \perp \text{平面 } ACDE, \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

过  $I$  作  $IK \perp AF$  于  $K$ , 连接  $MK$ , 则  $MK \perp AF. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$$\because AB = 2, \therefore MI = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore MK = \sqrt{MI^2 + IK^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + IK^2} = \frac{\sqrt{30}}{5},$$

$$\therefore IK = \frac{3\sqrt{5}}{10}, \text{ 过 } C \text{ 作 } CH \perp AF \text{ 于 } H, \text{ 易知 } \frac{IK}{CH} = \frac{AI}{AC} = \frac{3}{4}, \text{ 则 } CH = \frac{3\sqrt{5}}{10} \times \frac{4}{3} = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\therefore CH = \frac{AC \times CF}{AF} = \frac{2 \cdot CF}{\sqrt{CF^2 + 4}}, \therefore CF = 1. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

(法二)在正  $\triangle ABC$  中,  $\because M$  为  $BC$  的中点,  $\therefore AM \perp BC. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$\because \text{平面 } ABC \perp \text{平面 } ACDE, AC \perp CD,$

$\therefore CD \perp \text{平面 } ABC, \therefore CD \perp AM. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

$\because BC \cap CD = C, \therefore AM \perp \text{平面 } BCD, \therefore AM \perp MF. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

设  $CF = a$ , 在  $\triangle AFM$  中,  $AM = \sqrt{3}, FM = \sqrt{a^2 + 1}, AF = \sqrt{a^2 + 4},$

$$\text{则 } \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{a^2 + 1} = \frac{1}{2} \times \sqrt{a^2 + 4} \times \frac{\sqrt{30}}{5}, \text{ 解得 } a = 1. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{从而 } V_{C-AFM} = V_{F-ACM} = \frac{1}{3} \times 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$20.(1) \text{ 解: } \because e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{m}{m+2}} = \sqrt{\frac{2}{m+2}}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } m > 1, \therefore 0 < e < \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$\therefore e \in (0, \frac{\sqrt{6}}{3})$ ..... 4 分

(2) 证明:  $\because$  椭圆的长轴长为  $2\sqrt{m+2}=4$ ,  $\therefore m=2$ ,..... 5 分  
易知  $A(-2,0), B(2,0)$ , 设  $M(-2, y_0), P(x_1, y_1)$ ,

则  $\overrightarrow{OP}=(x_1, y_1), \overrightarrow{OM}=(-2, y_0)$ ,..... 6 分

直线  $BM$  的方程为  $y=-\frac{y_0}{4}(x-2)$ , 即  $y=-\frac{y_0}{4}x+\frac{1}{2}y_0$ ,..... 7 分

代入椭圆方程  $x^2+2y^2=4$ ,

得  $(1+\frac{y_0^2}{8})x^2-\frac{y_0^2}{2}x+\frac{y_0^2}{2}-4=0$ ,..... 8 分

由韦达定理得  $2x_1=\frac{4(y_0^2-8)}{y_0^2+8}$ ,..... 9 分

$\therefore x_1=\frac{2(y_0^2-8)}{y_0^2+8}, \therefore y_1=\frac{8y_0}{y_0^2+8}$ ,..... 10 分

$\therefore \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OM} = -2x_1 + y_0 y_1 = -\frac{4(y_0^2-8)}{y_0^2+8} + \frac{8y_0^2}{y_0^2+8} = \frac{4y_0^2+32}{y_0^2+8} = 4 = 2m$ ..... 12 分

21. 解: (1) 当  $a=0$  时, 显然不合题意, 故  $a \neq 0$ ...... 1 分

$f(x)=3ax^2-2x$ , 令  $f'(x)=0$ , 得  $x=0$  或  $x=\frac{2}{3a}$ ..... 2 分

由题意可得,  $1 < \frac{2}{3a} < 3$ , 解得  $\frac{2}{9} < a < \frac{2}{3}$ , 即  $a$  的取值范围为  $(\frac{2}{9}, \frac{2}{3})$ ..... 4 分

(2) 当  $a=0$  时  $f(x)=-x^2$  在  $[-1, 2]$  上的最小值为  $f(2)=-4$ ..... 5 分

当  $0 < a \leq \frac{1}{3}$  时,  $\frac{2}{a} \geq 6, f(x)=ax(3x-\frac{2}{a})$ .

$\because x \in [-1, 2], \therefore 3x-\frac{2}{a} \leq 0$ ,

故  $f(x)$  在  $[-1, 0]$  上单调递增, 在  $(0, 2]$  上单调递减,  $\therefore f(x)_{\min} = \min\{f(-1), f(2)\}$ ..... 6 分

$\because f(2)-f(-1) = (8a-4)-(-a-1) = 9a-3 \leq 0, \therefore f(x)_{\min} = f(2) = 8a-4$ ..... 7 分

当  $a > \frac{1}{3}$  时  $f(x)=ax(3x-\frac{2}{a}), 0 < \frac{2}{3a} < 2$ , 当  $x \in [-1, 0) \cup (\frac{2}{3a}, 2]$  时  $f'(x) > 0$ ;

当  $x \in (0, \frac{2}{3a})$  时  $f'(x) < 0$ ..... 8 分

$\therefore f(x)_{\min} = \min\{f(-1), f(\frac{2}{3a})\}$ .

$\because f(\frac{2}{3a})-f(-1) = (-\frac{4}{27a^2})-(-a-1) = \frac{27a^3+27a^2-4}{27a^2}$ ,..... 9 分

$\because a > \frac{1}{3}, \therefore 27a^3+27a^2-4 > 0, \frac{27a^3+27a^2-4}{27a^2} > 0$ ,..... 10 分

$\therefore f(x)_{\min} = f(-1) = -a-1$ ..... 11 分

综上, 当  $0 \leq a \leq \frac{1}{3}$  时  $f(x)_{\min} = 8a-4$ ; 当  $a > \frac{1}{3}$  时  $f(x)_{\min} = -a-1$ ..... 12 分

22. 解: (1) 由题意可得  $|a|=1$ ,..... 1 分

故  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 4t + 1 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$  ( $t$  为参数), 圆  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = -2 + \sin\theta \end{cases}$  ( $\theta$  为参数),

- 消去参数  $t$ , 得  $l$  的普通方程为  $3x-4y-7=0$ , ..... 3 分
- 消去参数  $\theta$ , 得  $C$  的普通方程为  $(x-1)^2+(y+2)^2=1$ , ..... 5 分
- (2)  $l'$  的方程为  $y=\frac{3}{4}(x+m)-\frac{7}{4}$ , 即  $3x-4y+3m-7=0$ , ..... 6 分
- 因为圆  $C$  只有一个点到  $l'$  的距离为 1, 圆  $C$  的半径为 1,  
所以  $C(1,-2)$  到  $l'$  的距离为 2, ..... 8 分
- 即  $\frac{|3+8+3m-7|}{5}=2$ , 解得  $m=2(m=-\frac{14}{3}<0$  舍去), ..... 10 分
23. 解: (1) 当  $a=1$  时,  $f(x)=\begin{cases} 5-2x, & x \leq 1 \\ 3, & 1 < x < 4 \\ 2x-5, & x \geq 4 \end{cases}$ , ..... 3 分
- 故不等式  $f(x)<x$  的解集为  $(3,5)$ , ..... 5 分
- (2)  $\because f(x)=|x-a|+|x-4| \geq |(x-a)-(x-4)|=|a-4|$ , ..... 6 分
- $\therefore |a-4| \geq \frac{4}{a}-1=\frac{4-a}{a}$ , ..... 7 分
- 当  $a<0$  或  $a \geq 4$  时, 不等式显然成立; ..... 8 分
- 当  $0<a<4$  时,  $\frac{1}{a} \leq 1$ , 则  $1 \leq a < 4$ , ..... 9 分
- 故  $a$  的取值范围为  $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$ , ..... 10 分

自主招生在线创始于 2014 年, 是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台, 旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵, 关注用户超百万, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生, 引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主招生在线官方微信号: **zizzsw**。



微信扫一扫, 快速关注