乌鲁木齐地区 2023 年高三年级第三次质量监测

文科数学参考答案及评分标准

一、选择题（共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1~5．BADCC　　6~10．BBCAD　　11~12．CD

二、填空题（共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．1　　14．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　15．6　　16．$4\sqrt{3}+1$

三、解答题

17．

(1)由余弦定理得 $2\sqrt{2}a^2\cos B=2ab\cos C+2ac\cos B$，则 $\sqrt{2}a\cos B=b\cos C+c\cos B$

由正弦定理得 $\sqrt{2}\sin A\cos B=\sin B\cos C+\sin C\cos B$，$\therefore \sqrt{2}\sin A\cos B=\sin A$　$\because \sin A\neq 0$

$\therefore \cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$，又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\frac{\pi}{4}$；　　…6 分

(2)由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin(A+B)}$　即 $c=\frac{2\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin A}=\sqrt{2}\left(1+\frac{1}{\tan A}\right)$

而 $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{\sqrt{2}}{2}c=1+\frac{1}{\tan A}$

由 ΔABC 为锐角三角形，$\therefore A+\frac{\pi}{4}>\frac{\pi}{2}$ 且 $0<A<\frac{\pi}{2}$，则 $\frac{\pi}{4}<A<\frac{\pi}{2}$

$\therefore 1+\frac{1}{\tan A}\in(1,2)$，即 $S_{\Delta ABC}\in(1,2)$.　　…12 分

18．

(1) $\bar{x}=5,\bar{y}=50$，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=$

$=(2-5)\times(30-50)+(4-5)\times(40-50)+(5-5)\times(60-50)+(6-5)\times(50-50)+(8-5)\times(70-50)=130$

$\sqrt{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}=$

$=\sqrt{\left[(2-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+(6-5)^2+(8-5)^2\right]\left[2\times(30-50)^2+2\times(40-50)^2\right]}=100\sqrt{2}$

$\therefore r=\frac{130}{100\sqrt{2}}\approx 0.92$；　　…6 分

(2)由(1)知，$\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=130,\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=20$，$\therefore \hat{b}=\frac{130}{20}=6.5$

即广告费支出每增加1万元时，销售平均增加6.5万元.　　…12 分

19.

(1)证明：在ΔABC中，M,E分别为AC,BC的中点，则$ME\ //\ AB$

折叠前$AD\perp BC$则折叠后$AD\perp CD$，又$\angle BDC=90^{\circ}$即$CD\perp BD$，且$BD\cap AD=D$

$\therefore CD\perp$平面ADB，又$AB\subset$平面ADB，$\therefore CD\perp AB$而$ME\ //\ AB$，$\therefore CD\perp ME$；…6分

(2)设$BD=x(0<x<3)$，则$CD=3-x$，$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}x(3-x)^2=\frac{1}{6}x(3-x)^2\ (0<x<3)$

$\therefore V'=\frac{1}{2}(3-x)(1-x)$，令$V'=0$解得$x=1$，即当$BD=1,CD=2$时，$V_{A-BCD}$取最大,

此时$DA=2$，$V_{\max}=\frac{2}{3}$. …12分

20.

(1)由已知$b=1,\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore a=2,b=1$，故椭圆方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$； …4分

(2)设直线MN的方程为$y-1=k(x+2),k<0$

联立方程组$\begin{cases}y=kx+2k+1\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$，可得$(1+4k^2)x^2+8k(2k+1)x+16k^2+16k=0$

设$D(x_1,y_1),E(x_2,y_2),y_1=kx_1+2k+1,y_2=kx_2+2k+1$

$x_1+x_2=\frac{-8k(2k+1)}{1+4k^2},x_1\cdot x_2=\frac{16k(k+1)}{1+4k^2}$

$l_{AD}:y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1\Rightarrow x_M=\frac{x_1}{1-y_1}$，设直线$AE$交$x$轴与点$N$，同理$x_N=\frac{x_2}{1-y_2}$

$S_{DMEN}=\frac{1}{2}|x_N-x_M|(y_1-y_2)=\frac{1}{2}\left|\frac{x_2}{1-y_2}-\frac{x_1}{1-y_1}\right|(y_1-y_2)\ =\frac{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}$

$$=\frac{16k^2(2k+1)^2-16k(k+1)(4k^2+1)}{4k^2+1}=\frac{-16}{4k+\frac{1}{k}}=\frac{16}{-4k+\left(-\frac{1}{k}\right)}\le\frac{16}{2\sqrt{4}}=4$$

当且仅当$k=-\frac{1}{2}$时，取最大值4. …12分

21.

(1) $f(x)=e^x(1+a\ln x)(x>0)$，$f'(x)=e^x\left(1+a\ln x+\frac{a}{x}\right)(x>0)$

$\because f'(x)\ge 3e^x$恒成立，$\therefore 1+a\ln x+\frac{a}{x}\ge 3$恒成立

即 $a\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)-2\ge 0$，令 $g(x)=\ln x+\frac{1}{x}(x>0)$

则 $g'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，易知当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$

∴ $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上为减函数，$(1,+\infty)$ 上为增函数，$g(x)\ge g(1)=1$

∴ $0<\frac{1}{g(x)}\le 1$，$a\cdot g(x)\ge 2$ 恒成立，$a\ge\left(\frac{2}{g(x)}\right)_{\max}=2$． …6 分

(2)由 $f(x)=0$，得 $1+a\ln x=0$，解得 $x=e^{-\frac{1}{a}}$

令 $h(x)=f'(x)=e^x\left(1+a\ln x+\frac{a}{x}\right)(x>0)$，则 $h'(x)=e^x\left(1+a\ln x+\frac{2a}{x}-\frac{a}{x^2}\right)$

令 $\varphi(x)=1+a\ln x+\frac{2a}{x}-\frac{a}{x^2}$，则 $\varphi'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2a}{x^2}+\frac{2a}{x^3}=\frac{a\left(x^2-2x+2\right)}{x^3}>0$

$\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

$$\varphi(x_1)=\varphi\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)=1+(-1)+\frac{2a}{e^{-\frac{1}{a}}}-\frac{a}{\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)^2}=\frac{a\left(2e^{-\frac{1}{a}}-1\right)}{\left(e^{-\frac{1}{a}}\right)^2}$$

∵ $a\ge 2$，∴ $\frac{1}{a}\le\frac{1}{2},-\frac{1}{a}\ge-\frac{1}{2}$，$e^{-\frac{1}{a}}\ge e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$，$2e^{-\frac{1}{a}}\ge\frac{2}{\sqrt{e}}>1$，∴ $\varphi(x_1)>0$

$$\varphi\left(e^{-\frac{1}{a}-1}\right)=1+a\left(-\frac{1}{a}-1\right)+\frac{a\left(2e^{-\frac{1}{a}-1}-1\right)}{\left(e^{-\frac{1}{a}-1}\right)^2}=\frac{-a\left(e^{-\frac{1}{a}-1}-1\right)^2}{\left(e^{-\frac{1}{a}-1}\right)^2}<0$$

∴存在 $x_2\in\left(e^{-\frac{1}{a}-1},e^{-\frac{1}{a}}\right)$，使 $\varphi(x_2)=0$

∴ $\varphi(x_1)>\varphi(x_2)$，∴ $x_1>x_2$ …12 分

22.

(1)由 $\begin{cases}x'=2x\\y'=\sqrt{3}y\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}x=\frac{x'}{2}\\y=\frac{\sqrt{3}}{3}y'\end{cases}$，代入到 $x^2+y^2=1$ 中，得 $\frac{(x')^2}{4}+\frac{(y')^2}{3}=1$

即 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 为曲线 C' 的直角坐标方程；…5 分

⑵设 $P\left(2\cos\theta,\sqrt{3}\sin\theta\right)$，则点 P 到直线 $l:\sqrt{3}x+y-6=0$ 的距离为

$$d=\frac{\left|2\sqrt{3}\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta-6\right|}{2}=\frac{\left|\sqrt{15}\sin(\theta+\varphi)-6\right|}{2}$$，其中 $\tan\varphi=2$

当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，即 $\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，$d=\frac{6-\sqrt{15}}{2}$

即距离最小值为 $\frac{6-\sqrt{15}}{2}$，此时点 $p\left(\frac{4\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$. …10 分

23.

⑴由 $|2x+1|\le 3x$ 得，$(2x+1)^2\le 9x^2$ 且 $x\ge 0$，解得 $x\ge 1$

即原不等式的解集 $M=[1,+\infty)$；…5 分

⑵由⑴知 $f(x)=2x+1$

$\therefore f(x)+\frac{a}{f(x)}\ge 4-a$ 即为 $2x+1+\frac{a}{2x+1}\ge 4-a(x\ge 1)$ 恒成立

则 $a\ge\frac{(3-2x)(2x+1)}{2x+2}(x\ge 1)$ 恒成立

设 $h(x)=\frac{(3-2x)(2x+1)}{2x+2}=6-2(x+1)-\frac{5}{2(x+1)}(x\ge 1)$

$\because h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $h(x)\le h(1)=\frac{3}{4}$，$\therefore a\ge\frac{3}{4}$

即正实数 a 的最小值为 $\frac{3}{4}$. …10 分