

中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 1 月测试

理科数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。


1. 设集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 8 < 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}^* | 1 < x < 5\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{2\}$ B. $\{2, 3\}$ C. $\{3, 4\}$ D. $\{2, 3, 4\}$
2. 已知 $z = 2 + i$, 则 $\bar{z}(z + i) =$

A. $6 - 2i$ B. $4 - 2i$ C. $6 + 2i$ D. $4 + 2i$
3. 已知圆锥的底面半径为 2, 其侧面展开图为一个半圆, 则该圆锥的侧面积为

A. 4π B. $8\sqrt{2}\pi$ C. $4\sqrt{2}\pi$ D. 8π
4. 美学四大构件是：史诗、音乐、造型（绘画、建筑等）和数学。素描是学习绘画的必要一步，它包括了明暗素描和结构素描，而学习几何体结构素描是学习素描最重要的一步。某同学在画“切面圆柱体”（用与圆柱底面不平行的平面去截圆柱，底面与截面之间的部分叫做切面圆柱体）的过程中，发现“切面”是一个椭圆（如图所示），若“切面”所在平面与底面成 30° 角，则该椭圆的离心率为

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{1}{3}$



(第 4 题图)
5. 过点 $P(1, -2)$ 作圆 $C: (x-1)^2 + y^2 = 1$ 的两条切线，切点分别为 A, B , 则 AB 所在直线的方程为

A. $y = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ B. $y = -\frac{1}{2}$ C. $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $y = -\frac{1}{4}$
6. 椭圆 $C: mx^2 + ny^2 = 1$ 与直线 $y = 1 - \sqrt{3}x$ 交于 M, N 两点，过原点与线段 MN 中点的直线的斜率为 $\frac{2}{3}$, 则 $\frac{m}{n}$ 的值为

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{3}}{27}$ C. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
7. 若 $\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = 2$, 则 $\frac{\sin \theta (1 + \sin 2\theta)}{\sin \theta + \cos \theta} =$

- A. $-\frac{6}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{2}{5}$

8. 下列命题中，假命题的是

- A. 样本数据 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 与样本数据 $y_i = x_i + c (i=1, 2, \dots, n)$, c 为非零常数, 两组样本数据的样本平均数相同
 B. 样本 98, 99, 100, 101, 102 的标准差为 $\sqrt{2}$
 C. $(x-y)^n$ 的二项展开式中, 第 r 项的二项式系数是 C_n^{r-1}
 D. 命题 “ $\exists x \in [1, 2], x + \frac{1}{x} - a = 0$ ” 是真命题的充要条件为 $a \in \left[2, \frac{5}{2}\right]$

9. 设函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 则下列结论正确的是

- A. 函数 $y = f\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ 为偶函数
 B. 函数 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{4}\right)$ 上单调递增
 C. 函数 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 有且仅有 2 个极小值点
 D. 把函数 $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 的图像上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到函数 $f(x)$ 的图像

10. 已知奇函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数, $g(x) = xf(x)$. 若 $a = g(-2^{0.5})$, $b = g(-\log_2 0.2)$, $c = g(3)$, 则 a, b, c 的大小关系为

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

11. 已知 O 为坐标原点, 点 $P(2\cos\alpha, \sin\alpha)$, $Q(\cos\beta, 2\sin\beta)$, $A(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$, $B(2, 0)$, 则下列结论正确的是

- A. $|\overline{OP}| = |\overline{OQ}|$
 B. $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OP} \cdot \overline{OQ}$
 C. 记 $\Omega = \{(P, Q) | \overline{OP} \cdot \overline{OQ} \text{ 取最大值}, 0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta < 2\pi\}$, 则 Ω 中有且只有 4 个元素
 D. 记 w 是 $\overline{OP} \cdot \overline{OQ}$ 的最大值, 则 $w = 2$

12. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, F_1, F_2 分别为左、右焦点, 设点 P 是在双曲线上且在第一象限的动点, 点 I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心, $A(0, 4)$, 则下列说法正确的是

- A. 双曲线 C 的渐近线方程为 $\frac{x}{4} \pm \frac{y}{5} = 0$

B. 点 I 的运动轨迹为双曲线的一部分

C. 若 $|PF_1| = 2|PF_2|$, $\overline{PI} = x\overline{PF_1} + y\overline{PF_2}$, 则 $y - x = \frac{2}{9}$

D. 不存在点 P , 使得 $PA + PF_1$ 取得最小值

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知球的体积为 36π , 则该球主视图的面积等于_____.

14. 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_n = 2a_n + 2$, 则 $S_6 =$ _____.

15. 已知四个函数: ① $y = -x$, ② $y = x^2$, ③ $y = 2^x$, ④ $y = \ln x$, 从中任选 2 个, 则事件“所选 2 个函数的图像有且仅有一个公共点”的概率为_____.

16. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的所有棱长都为 2, 且球 O 为三棱锥的外接球, 点 M 是线段 BD 上靠近 D 点的三等分点, 过点 M 作平面 α 截球 O 得到的截面面积为 S , 则 S 的取值范围为_____.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一) 必考题：共 60 分.

17. (12 分) 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\cos^2 A - \sin^2 A + \frac{1}{2} = 0$.

(1) 求角 A 的值;

(2) 若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 设 $a = \sqrt{19}$, $b = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分) 已知某单位甲、乙、丙三个部门的员工人数分别为 32, 24, 24. 现采用分层抽样的方法从中抽取 10 人进行睡眠时间的调查.

(1) 应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取多少人?

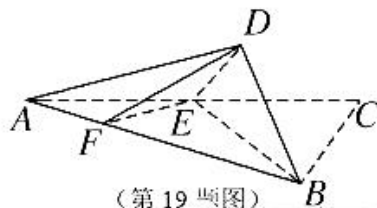
(2) 若抽出的 10 人中有 6 人睡眠不足, 4 人睡眠充足, 现从这 10 人中随机抽取 3 人做进一步的身体检查.

① 用 X 表示抽取的 3 人中睡眠不足的员工人数, 求随机变量 X 的分布列与数学期望;

② 设 A 为事件“抽取的 3 人中, 既有睡眠充足的员工, 也有睡眠不足的员工”, 求事件 A 发生的概率.

19. (12 分) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 4$, $BC = 2$, E 是 AC 的中点, F 是线段 AB 上一个动点, 且 $\overline{AF} = \lambda\overline{AB}$ ($0 < \lambda < 1$), 如图所示, 沿 BE 将 $\triangle CEB$ 翻折至 $\triangle DEB$ 的位置, 使得平面 $DEB \perp$ 平面 ABE .

(1) 当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时, 证明: $BD \perp$ 平面 DEF ;



(第 19 题图)

(2) 是否存在实数 λ , 使三棱锥 $B-DEF$ 的体积为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$? 若不存在, 请说明理由; 若存在, 求

出 λ 的值, 并求出 DF 与平面 ADE 所成角的正弦值.

20. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知动圆 P 与圆 $O_1: x^2 - 2x + y^2 = 0$ 内切, 且与直线 $x = -2$ 相切, 设动圆圆心 P 的轨迹为曲线 C .

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 曲线 C 上存在一点 $S(4, y_0) (y_0 > 0)$, 不经过点 S 的直线 l 与 C 交于 A, B 两点, 若直线 AS, BS 的斜率之和为 2, 证明: 直线 l 过定点.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \ln x - ax + \frac{a}{x} (a > 0)$.

(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时: ① 解关于 x 的不等式 $f(x) > 0$;

② 证明: $\left(1 + \frac{1}{2^2}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) < e^{\frac{3}{4}} (n \in \mathbf{N}^+, n \geq 2)$;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - \ln 2 + \frac{3a}{x}$ 恰有三个不同的零点, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. (10 分) [选修: 坐标系与参数方程]

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数})$, 以坐标原点为极点,

x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

(1) 写出曲线 C 的极坐标方程及直线 l 的直角坐标方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 的交点分别为 A, B , 点 P (异于 A, B 两点) 在曲线 C 上运动, 求 ΔPAB 面积的最大值.

23. (10 分) [选修: 不等式选讲]

已知函数 $f(x) = \frac{1}{3}|x - a| (a \in \mathbf{R})$.

(1) 当 $a = 2$ 时, 解不等式 $\left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \geq 1$;

(2) 设不等式 $\left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \leq x$ 的解集为 M , 若 $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] \subseteq M$, 求实数 a 的取值范围.

中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 1 月测试

理科数学 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	C	D	A	B	D	C	A	C	A	D	C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 9π 14. -126 15. $\frac{1}{3}$ 16. $\left[\frac{8\pi}{9}, \frac{3\pi}{2}\right]$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

(1) $\cos^2 A - \sin^2 A + \frac{1}{2} = \cos 2A + \frac{1}{2} = 0, A \in (0, \pi)$
 解得 $2A = \frac{2}{3}\pi$ 或 $\frac{4}{3}\pi$, 即 $A = \frac{1}{3}\pi$ 或 $\frac{2}{3}\pi$ 5 分

(2) 由 $\triangle ABC$ 为锐角三角形得 $A = \frac{1}{3}\pi$,
 由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$, 化为 $c^2 - 5c + 6 = 0$, 解得 $c = 2$ 或 3 9 分
 若 $c = 2$, 则 $\cos B = \frac{19 + 4 - 25}{2 \times \sqrt{19} \times 2} < 0$, 即 B 为钝角, $\therefore c = 2$ 不成立,
 则 $c = 3$, 经检验符合条件.
 $\triangle ABC$ 的面积为 $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ 12 分

18. (12 分)

(1) 由已知, 甲、乙、丙三个部门的员工人数之比为 4: 3: 3, 采用分层抽样的方法从中抽取 10 人, 因此应从甲、乙、丙三个部门的员工中分别抽取 4 人, 3 人, 3 人 2 分

(2) ① 随机变量 X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3

$$P(X = k) = \frac{C_6^k C_4^{3-k}}{C_{10}^3} (k = 0, 1, 2, 3)$$

所以随机变量 X 的分布列为:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X) = 0 \times \frac{1}{30} + 1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{9}{5}$ 7 分

(2) ② 设事件 B 为“抽取的 3 人中, 睡眠充足的员工有 1 人, 睡眠不足的员工有 2 人”,

事件 C 为“抽取的 3 人中，睡眠充足的员工有 2 人，睡眠不足的员工有 1 人”，

则 $A = B \cup C$ 且 B 与 C 互斥，

由 (1) 知， $P(B) = P(X=2)$ ， $P(C) = P(X=1)$

故 $P(A) = P(B \cup C) = P(X=2) + P(X=1) = \frac{4}{5}$

所以，事件 A 发生的概率为 $\frac{4}{5}$ 12 分

19. (12 分)

(1) 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，即 $AC \perp BC$ ，则 $BD \perp DE$ ，

取 BF 的中点 N ，连接 CN 交 BE 于点 M ，

当 $\lambda = \frac{1}{3}$ 时， F 是 AN 的中点，而 E 是 AC 的中点，

$\therefore EF$ 是 $\triangle ANC$ 的中位线， $\therefore EF \parallel CN$

在 $\triangle BEF$ 中， N 是 BF 的中点， $\therefore M$ 是 BE 的中点，

在 $Rt\triangle BCE$ 中， $EC = BC = 2$ ， $\therefore CM \perp BE$ ，则 $EF \perp BE$ ，

又平面 $DEB \perp$ 平面 ABE ，平面 $DEB \cap$ 平面 $ABE = BE$ ， $EF \subset$ 平面 ABE ，

$\therefore EF \perp$ 平面 DEB ，又 $BD \subset$ 平面 DEB

$\therefore EF \perp BD$ ，而 $EF \cap DE = E$ ， $EF, DE \subset$ 平面 DEF

$\therefore BD \perp$ 平面 DEF 5 分

(2) 取 BE 的中点 G ，连接 DG ，则 $DG \perp BE$ ，而平面 $DEB \perp$ 平面 ABC ，

$\therefore DG \perp$ 平面 ABC ，且 $DG = \sqrt{2}$ ， $V_{B-DEF} = \frac{1}{3} DG \cdot S_{\triangle BEF} = \frac{1}{3} \times \sqrt{2} \times S_{\triangle BEF} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore S_{\triangle BEF} = 1 = S_{\triangle BEA} - S_{\triangle AEF}$ ， $\therefore F$ 到 AE 的距离为 1，

$\therefore F$ 为 AB 的中点，此时 $\lambda = \frac{1}{2}$ 7 分

以 C 为坐标原点， CA 所在直线为 x 轴， CB 所在直线为 y 轴，建立如图所示的空间直角坐标系

系，则 $C(0,0,0)$ ， $A(4,0,0)$ ， $B(0,2,0)$ ， $E(2,0,0)$ ， $F(2,1,0)$

$\therefore \overrightarrow{AB} = (-4, 2, 0)$ ， $\overrightarrow{AE} = (-2, 0, 0)$ ， $D(1, 1, \sqrt{2})$ ， $\overrightarrow{AD} = (-3, 1, \sqrt{2})$ 。

设平面 ADE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，

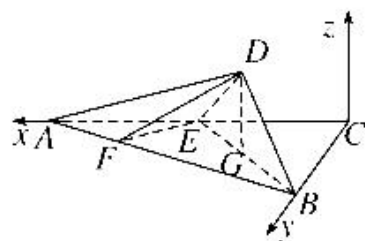
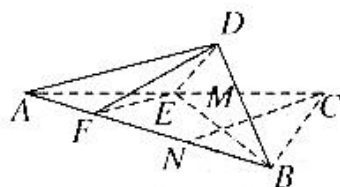
$$\text{则 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} -2x = 0 \\ -3x + y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

令 $z = -1$ ，则 $x = 0$ ， $y = \sqrt{2}$ ，

$\therefore \vec{n} = (0, \sqrt{2}, -1)$ ， $\overrightarrow{DF} = (1, 0, -\sqrt{2})$

设 DF 与平面 ADE 所成的角为 θ ，则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{DF}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{DF} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{DF}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore DF$ 与平面 ADE 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 12 分



20. (12分)

(1) 由题意可知, 动圆圆心 P 到点 $(1,0)$ 的距离与到直线 $x = -1$ 的距离相等,

所以点 P 的轨迹是以 $(1,0)$ 为焦点, 直线 $x = -1$ 为准线的抛物线,

所以曲线 C 的方程为 $y^2 = 4x$ 4分

(2) 将 $x=4$ 代入 $y^2 = 4x$ 可得 $y_0 = 4$ 或 $y_0 = -4$ (舍), 所以点 S 坐标为 $(4,4)$.

因为直线 l 的斜率不等于 0, 设直线 l 的方程是 $x = my + n$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

$$\text{联立} \begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + n \end{cases}, \text{得 } y^2 - 4my - 4n = 0.$$

因为直线 l 与 C 有两个交点, $\Delta = 16m^2 + 16n > 0$, 即 $m^2 + n > 0$

$$\text{由韦达定理得} \begin{cases} y_1 + y_2 = 4m \\ y_1 y_2 = -4n \end{cases} \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

因为直线 AS , BS 的斜率之和为 2,

$$\therefore \frac{y_1 - 4}{x_1 - 4} + \frac{y_2 - 4}{x_2 - 4} = \frac{y_1 - 4}{\frac{y_1^2}{4} - 4} + \frac{y_2 - 4}{\frac{y_2^2}{4} - 4} = 4 \left(\frac{1}{y_1 + 4} + \frac{1}{y_2 + 4} \right) = \frac{4(y_1 + y_2 + 8)}{y_1 y_2 + 4(y_1 + y_2) + 16} = 2$$

$$\therefore 2y_1 y_2 + 4(y_1 + y_2) = 0$$

$$\text{将} \begin{cases} y_1 + y_2 = 4m \\ y_1 y_2 = -4n \end{cases} \text{代入上式可得: } -8n + 16m = 0, \text{ 即 } n = 2m$$

此时 $\Delta > 0$ 即 $m < -2$ 或 $m > 0$, 直线 l 与抛物线有两个交点

所以直线 l 的方程是 $x = my + n = m(y + 2)$, 它过定点 $(0, -2)$ 12分

21. (12分)

(1) ①当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2x}$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = -\frac{(x-1)^2}{2x^2} \leq 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调递减函数

又 $f(1) = 0$, $f(x) > 0$ 解集为 $x \in (0, 1)$ 4分

②证明: 由①知当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$, 即 $\ln x < \frac{x}{2} - \frac{1}{2x}$

令 $x = 1 + \frac{1}{n^2}$ ($n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$),

$$\text{则 } \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) - \frac{1}{2 \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{1 + 2n^2}{2n^2(n^2 + 1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2 + 1} \right)$$

$$< \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\text{从而 } \ln \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{4^2} \right) + \dots + \ln \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$< \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{2^2} \right) \left(1 + \frac{1}{3^2} \right) \left(1 + \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) < e^{\frac{3}{2}} \quad (n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2) \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

(2) $g(x) = \ln \frac{x}{2} - ax + \frac{4a}{x} \quad (x > 0)$

$$\therefore g'(x) = \frac{1}{x} - a - \frac{4a}{x^2} = \frac{-ax^2 + x - 4a}{x^2} \quad (x > 0)$$

设 $k(x) = -ax^2 + x - 4a$ ，则 $\Delta = 1 - 16a^2$ ，

① 当 $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ，即 $a \geq \frac{1}{4}$ 时， $g'(x) \leq 0$ ，所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减

$\therefore g(x)$ 不可能有三个不同的零点；

② 当 $\begin{cases} \Delta > 0 \\ a > 0 \end{cases}$ ，即 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时， $k(x)$ 有两个零点： $x_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - 16a^2}}{2a}$ ， $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 16a^2}}{2a}$

$$\therefore x_2 > x_1 > 0$$

又 $\because k(x) = -ax^2 + x - 4a$ 开口向下

所以当 $0 < x < x_1$ 时， $k(x) < 0$ ，即 $g'(x) < 0$ ， $\therefore g(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减；

当 $x_1 < x < x_2$ 时， $k(x) > 0$ ，即 $g'(x) > 0$ ， $\therefore g(x)$ 在 (x_1, x_2) 上单调递增；

当 $x > x_2$ 时， $k(x) < 0$ ，即 $g'(x) < 0$ ， $\therefore g(x)$ 在 $(x_2, +\infty)$ 上单调递减。

$$\because g(2) = \ln 1 - 2a + \frac{4a}{2} = 0, \text{ 且 } x_1 x_2 = 4, \therefore x_1 < 2 < x_2$$

$$\therefore g(x_1) < g(2) = 0 < g(x_2)$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{a^2}\right) = \ln \frac{1}{2a^2} - a \cdot \frac{1}{a^2} + \frac{4a}{\frac{1}{a^2}} = -\ln 2 - 2 \ln a - \frac{1}{a} + 4a^3$$

$$\text{所以令 } m(a) = -\ln 2 - 2 \ln a - \frac{1}{a} + 4a^3$$

$$\text{则 } m'(a) = -\frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} + 12a^2 = \frac{12a^3 - 2a + 1}{a^2} > \frac{1 - 2a}{a^2} > 0$$

$\therefore m(a)$ 在 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 单调递增

$$\therefore m(a) < m\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 2 - 2 \ln\left(\frac{1}{4}\right) - 4 + 4\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 3 \ln 2 - 4 + \frac{1}{16} < 0, \text{ 则 } g\left(\frac{1}{a^2}\right) < 0$$

$$\text{又 } x_2 - \frac{1}{a^2} < \frac{2}{2a} - \frac{1}{a^2} = \frac{a-1}{a^2} < 0, \therefore x_2 < \frac{1}{a^2}$$

所以由零点存在性定理知， $g(x)$ 在区间 $\left(x_2, \frac{1}{a^2}\right)$ 上有唯一的一个零点 x_0

$$\because g(x_0) + g\left(\frac{4}{x_0}\right) = \ln \frac{x_0}{2} - ax_0 + \frac{4a}{x_0} + \ln\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{x_0}\right) - a \cdot \frac{4}{x_0} + \frac{4a}{\frac{4}{x_0}} = 0$$

$$\text{且 } g(x_0) = 0, \therefore g\left(\frac{4}{x_0}\right) = 0$$

$$\text{又 } \frac{4}{x_0} < \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 16a^2}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 16a^2}}{2a} = x_1, \therefore 0 < \frac{4}{x_0} < x_1$$

$\therefore g(x)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上有唯一的一个零点 $\frac{4}{x_0}$.

故当 $0 < a < \frac{1}{4}$ 时, $g(x)$ 存在三个不同的零点 $\frac{4}{x_0}, 2, x_0$.

故实数 a 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ 12 分

22. (10 分)

(1) 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = \sqrt{2} \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数),

两式平方并相加得 $x^2 + y^2 = 2$, 即 $\rho^2 = 2$, $\therefore \rho = \sqrt{2}$ 3 分

直线 l 的极坐标方程为 $\sqrt{2}\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 即 $\sqrt{2}\rho \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \theta\right) = 1$,

即 $\rho \cos \theta + \rho \sin \theta = 1$, 即 $x + y - 1 = 0$ 6 分

(2) 圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的圆心为 $(0, 0)$, 半径为 $r = \sqrt{2}$.

圆心到直线 $x + y - 1 = 0$ 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{2}} < r$.

因为直线和圆相交 $\therefore |AB| = 2 \times \sqrt{r^2 - d^2} = 2 \times \sqrt{2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{6}$.

根据圆的几何性质可知 P 到直线 AB 的距离的最大值为 $d + r = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

所以三角形 PAB 面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 10 分

23. (10 分)

(1) 当 $a = 2$ 时, 原不等式可化为 $|3x - 1| + |x - 2| \geq 3$ 1 分

① 当 $x \leq \frac{1}{3}$ 时, $1 - 3x + 2 - x \geq 3$, 解得 $x \leq 0$, $\therefore x \leq 0$ 2 分

② 当 $\frac{1}{3} < x < 2$ 时, $3x - 1 + 2 - x \geq 3$, 解得 $x \geq 1$, $\therefore 1 \leq x < 2$ 3 分

③当 $x \geq 2$ 时, $3x-1+x-2 \geq 3$, 解得 $x \geq \frac{3}{2}$, $\therefore x \geq 2$ 4分

综上所述, 当 $a=2$ 时, 不等式的解集为 $\{x|x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 1\}$ 5分

(2) 不等式 $\left|x - \frac{1}{3}\right| + f(x) \leq x$ 可化为 $|3x-1| + |x-a| \leq 3x$,

依题意不等式 $|3x-1| + |x-a| \leq 3x$ 在 $x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ 上恒成立6分

$\therefore 3x-1 + |x-a| \leq 3x$, 即 $|x-a| \leq 1$, 即 $a-1 \leq x \leq a+1$ 8分

$$\therefore \begin{cases} a-1 \leq \frac{1}{3} \\ a+1 \geq \frac{1}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } -\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{4}{3},$$

故所求实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right]$ 10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

