

## 2021 年 7 月测试

### 理科数学试卷

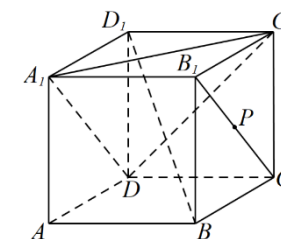
本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $i$  是虚数单位，复数  $zi = 1 - 2i$ ，则  $z$  的共轭复数  $\bar{z}$  的虚部为  
 A.  $-i$                       B.  $1$                       C.  $i$                       D.  $-1$
2. 已知集合  $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \log_2 x < 2\}$ ，集合  $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x-1} < \sqrt{2}\}$ ，则  $A \cap B =$   
 A.  $(-\infty, 3)$               B.  $(-1, 3)$               C.  $(0, 3)$               D.  $[1, 3)$
3. 武汉封城期间，某医院抽调 5 名医生，分赴三所“方舱医院”支援抗疫，要求每名医生只去一所“方舱医院”，每所“方舱医院”至少安排一名医生，由于工作需要，医生甲和乙必须安排在同一所“方舱医院”，则所有不同的安排方案有  
 A. 18 种                      B. 24 种                      C. 36 种                      D. 48 种
4. 设  $a = \ln 0.2$ ， $b = \sin 3$ ， $c = e^{0.1}$ ，则  $a$ ， $b$ ， $c$  的大小关系为  
 A.  $c > b > a$               B.  $b > c > a$               C.  $a > b > c$               D.  $c > a > b$
5. 设  $m$ ， $n$  为两条不同的直线， $\alpha$ ， $\beta$  为两个不同的平面，则下列命题正确的是  
 A. 若  $\alpha \perp \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则  $m \perp n$               B. 若  $\alpha \parallel \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则  $m \parallel n$   
 C. 若  $m \perp \alpha$ ， $m \parallel n$ ， $n \subset \beta$ ，则  $\alpha \perp \beta$               D. 若  $m \parallel \alpha$ ， $\alpha \cap \beta = n$ ，则  $m \parallel n$
6. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & x > 0, \\ xe^x, & x < 0, \end{cases}$  ( $e = 2.71828 \dots$  为自然对数的底数)，若  $f(x)$  的零点为  $\alpha$ ，极小值为  $\beta$ ，则  $\alpha + \beta =$   
 A.  $-1$                       B.  $1$                       C.  $0$                       D.  $2$
7. 已知四棱锥  $V-ABCD$  的所有棱都相等，点  $M$ ， $N$  分别为  $VB$ ， $VD$  中点，则异面直线  $MN$  与  $VA$  所成角的大小为

- A.  $30^\circ$                       B.  $45^\circ$                       C.  $60^\circ$                       D.  $90^\circ$

8. 设抛物线  $E: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ，已知  $B\left(-\frac{p}{2}, 3p\right)$ ， $C\left(-\frac{p}{2}, y_0\right)$  且  $y_0 > 0$ ，抛物线  $E$  上一点  $A$  满足  $AB \perp BC$ ，若线段  $AC$  的垂直平分线  $l$  过点  $F$ ，则直线  $l$  的斜率为  
 A.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$                       B.  $\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$                       C.  $\frac{3+\sqrt{6}}{3}$                       D.  $\sqrt{3}$
9. 下列命题中正确的是  
 A. 随机变量  $X \sim N(3, 2^2)$ ，若  $X = 2\eta + 3$ ，则  $D(\eta) = 16$   
 B. 已知随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(2, \delta^2)$ ， $P(\xi < 4) = 0.84$ ，则  $P(2 < \xi < 4) = 0.16$   
 C. 设  $(2x-1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，则  $a_0 = -1$   
 D. 以模型  $y = ce^{kx}$  去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设  $z = \ln y$ ，将其变换后得到线性方程  $z = 0.3x + 4$ ，则  $c$ ， $k$  的值分别是  $e^4$  和  $0.3$
10. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x (\omega > 0)$ ，实数  $x_1$ ， $x_2$  满足  $f(x_1) - f(x_2) = 4$ ，且  $|x_1 - x_2|$  的最小值为  $\frac{\pi}{2}$ ，由函数  $f(x)$  的图像向左平移  $\frac{\pi}{3}$  得到函数  $g(x)$ ，则  $g\left(\frac{\pi}{24}\right)$  的值为  
 A.  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$                       B.  $1$                       C.  $\sqrt{3}$                       D.  $2$
11. 如图，在棱长为  $a$  的正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，点  $P$  在侧面  $BB_1C_1C$ （包含边界）内运动，则下列结论正确的有  
 ① 直线  $BD_1 \perp$  平面  $A_1C_1D$   
 ② 二面角  $B_1-CD-B$  的大小为  $\frac{\pi}{2}$   
 ③ 过三点  $P$ 、 $A_1$ 、 $D$  的正方体的截面面积的最大值为  $\sqrt{2}a^2$   
 ④ 三棱锥  $B_1-A_1C_1D$  的外接球半径为  $\sqrt{3}a$   
 A. ①③                      B. ①②                      C. ①③④                      D. ①②③④
12. 画法几何创始人——法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  相切的两条垂直切线的交点轨迹为  $E: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ，这个轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆。下列结论不正确的是



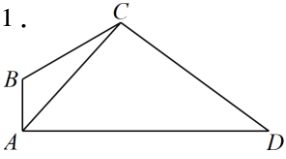
(第 11 题图)

- A. 已知椭圆  $C$  的长轴长为 4，离心率为  $e = \frac{1}{2}$ ，则椭圆  $C$  的“蒙日圆”  $E$  的方程为： $x^2 + y^2 = 7$
- B. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $A, B$  为椭圆  $C$  上的两个动点，直线  $l: bx + ay - a^2 - b^2 = 0$  上任一点  $P$ ，有  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} > 0$
- C. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，现将质点  $P$  随机投入椭圆  $C$  所对应的蒙日圆内，则质点落在椭圆外部的概率为  $1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ （椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  的面积公式为  $S = ab\pi$ ）
- D. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， $F$  为椭圆的右焦点， $A$  为椭圆上的一个动点，直线  $l: bx + ay - a^2 - b^2 = 0$ ，记点  $A$  到直线  $l$  距离为  $d$ ，则  $d - |AF|$  的最小值为  $\frac{4\sqrt{3}}{3}b - 2a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量  $\vec{a} + \vec{b} = (1, 1)$ ， $\vec{a} - \vec{b} = (-3, 1)$ ， $\vec{c} = (1, 1)$ ，向量  $\vec{a}$  与  $\vec{c}$  的夹角  $\theta =$ \_\_\_\_\_.
14. 已知函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ， $f(x+1)$  为偶函数， $f(0) = 1$ ，则  $f(2) =$ \_\_\_\_\_.
15. 记  $\langle x \rangle$  表示与实数  $x$  最接近的整数，数列  $\{a_n\}$  通项公式为  $a_n = \frac{1}{\langle \sqrt{n} \rangle} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，其前  $n$  项和为  $S_n$ ，则  $S_{33} =$ \_\_\_\_\_.
16. 已知函数  $f(x) = \sin x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ ，则  $f(x)$  的最小值是\_\_\_\_\_.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 在平面四边形  $ABCD$  中，已知  $\angle ABC = \frac{3\pi}{4}$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = 1$ .
- 
- (1) 若  $AC = \sqrt{5}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积；
- (2) 已知  $\cos \angle CAD = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $CD = \sqrt{13}$ ，求  $AD$  的长.
- (第 17 题图)
18. (12 分) 十九大以来，国家深入推进精准脱贫，加大资金投入，强化社会帮扶，为了更好的服务于人民，派调查组到某农村去考察和指导工作. 某学校为了研究学生对时事了解的情况，在网上随机抽取 120 名学生对精准脱贫政策的了解情况进行调查，其中男生与女生的人数之比为 11:13，其中男生 30 人对于精准脱贫政策了解，女生中有 25 人表示对精准脱贫政策不了解.

- (1) 完成  $2 \times 2$  列联表，并回答能否有 90% 的把握认为对“精准脱贫政策了解与性别有关”；

	了解	不了解	总计
男生			
女生			
合计			120

- (2) 从对精准脱贫政策了解的学生中，利用分层抽样抽取 7 名学生，再在 7 名学生中抽取 3 名学生，作精准脱贫政策了解的政策讲解，其中抽取女生的个数为  $\xi$ ，求  $\xi$  的分布列及期望值.

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

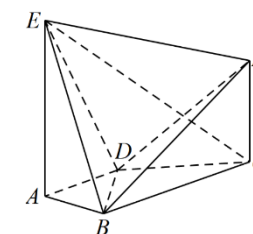
$P(K^2 > k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
$k$	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (12 分) 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ， $a_1 = 1$ ， $S_{n+1} = S_n + 2a_n + 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ .

- (1) 求证：数列  $\{a_n + 1\}$  是等比数列；
- (2) 数列  $\left\{ \frac{2^n}{a_n \cdot a_{n+1}} \right\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $T_n < 1$ .

20. (12 分) 如图， $AE \perp$  平面  $ABCD$ ， $CF \parallel AE$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = AD = 1$ ， $AE = BC = 2$ .

- (1) 求证： $BF \parallel$  平面  $ADE$ ；
- (2) 若二面角  $E-BD-F$  的余弦值为  $\frac{1}{3}$ ，求三棱锥  $C-BDF$  的体积.



(第 20 题图)

21. (12 分) 已知函数  $f(x) = e^{x-1} - a \ln x + a \ln a$ .

- (1) 当  $a = 1$  时，讨论  $f(x)$  的单调性；
- (2) 当  $a > 0$  时，证明： $f(x) \geq a$ .

22. (12 分) 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，四点  $A(2, 1)$ ， $B(2, -1)$ ， $C(1, 1)$ ， $D(0, \sqrt{3})$  中恰有三点在椭圆  $C$  上.

- (1) 求  $C$  的方程；
- (2) 点  $M, N$  在  $C$  上，且  $AM \perp AN$ ，证明直线  $MN$  过定点.