

2021 年 7 月测试

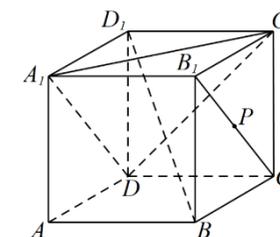
理科数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知 i 是虚数单位，复数 $zi = 1 - 2i$ ，则 z 的共轭复数 \bar{z} 的虚部为
A. $-i$ B. 1 C. i D. -1
- 已知集合 $A = \{x \in \mathbf{R} \mid \log_2 x < 2\}$ ，集合 $B = \{x \in \mathbf{R} \mid \sqrt{x-1} < \sqrt{2}\}$ ，则 $A \cap B =$
A. $(-\infty, 3)$ B. $(-1, 3)$ C. $(0, 3)$ D. $[1, 3)$
- 武汉封城期间，某医院抽调 5 名医生，分赴三所“方舱医院”支援抗疫，要求每名医生只去一所“方舱医院”，每所“方舱医院”至少安排一名医生，由于工作需要，医生甲和乙必须安排在同一所“方舱医院”，则所有不同的安排方案有
A. 18 种 B. 24 种 C. 36 种 D. 48 种
- 设 $a = \ln 0.2$ ， $b = \sin 3$ ， $c = e^{0.1}$ ，则 a ， b ， c 的大小关系为
A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $c > a > b$
- 设 m ， n 为两条不同的直线， α ， β 为两个不同的平面，则下列命题正确的是
A. 若 $\alpha \perp \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则 $m \perp n$ B. 若 $\alpha \parallel \beta$ ， $m \subset \alpha$ ， $n \subset \beta$ ，则 $m \parallel n$
C. 若 $m \perp \alpha$ ， $m \parallel n$ ， $n \subset \beta$ ，则 $\alpha \perp \beta$ D. 若 $m \parallel \alpha$ ， $\alpha \cap \beta = n$ ，则 $m \parallel n$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \ln x + 1, & x > 0, \\ xe^x, & x < 0, \end{cases}$ ($e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数)，若 $f(x)$ 的零点为 α ，极小值为 β ，则 $\alpha + \beta =$
A. -1 B. 1 C. 0 D. 2
- 已知四棱锥 $V-ABCD$ 的所有棱都相等，点 M ， N 分别为 VB ， VD 中点，则异面直线 MN 与 VA 所成角的大小为
A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

- 设抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F ，已知 $B(-\frac{p}{2}, 3p)$ ， $C(-\frac{p}{2}, y_0)$ 且 $y_0 > 0$ ，抛物线 E 上一点 A 满足 $AB \perp BC$ ，若线段 AC 的垂直平分线 l 过点 F ，则直线 l 的斜率为
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ B. $\frac{3+2\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{3+\sqrt{6}}{3}$ D. $\sqrt{3}$
- 下列命题中正确的是
A. 随机变量 $X \sim N(3, 2^2)$ ，若 $X = 2\eta + 3$ ，则 $D(\eta) = 16$
B. 已知随机变量 ξ 服从正态分布 $N(2, \delta^2)$ ， $P(\xi < 4) = 0.84$ ，则 $P(2 < \xi < 4) = 0.16$
C. 设 $(2x-1)^{10} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$ ， $x \in \mathbf{R}$ ，则 $a_0 = -1$
D. 以模型 $y = ce^{kx}$ 去拟合一组数据时，为了求出回归方程，设 $z = \ln y$ ，将其变换后得到线性方程 $z = 0.3x + 4$ ，则 c ， k 的值分别是 e^4 和 0.3
- 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x - \cos \omega x (\omega > 0)$ ，实数 x_1 ， x_2 满足 $f(x_1) - f(x_2) = 4$ ，且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ，由函数 $f(x)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 得到函数 $g(x)$ ，则 $g(\frac{\pi}{24})$ 的值为
A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 2
- 如图，在棱长为 a 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 在侧面 BB_1C_1C (包含边界) 内运动，则下列结论正确的有
① 直线 $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D
② 二面角 B_1-CD-B 的大小为 $\frac{\pi}{2}$
③ 过三点 P 、 A_1 、 D 的正方体的截面面积的最大值为 $\sqrt{2}a^2$
④ 三棱锥 $B_1-A_1C_1D$ 的外接球半径为 $\sqrt{3}a$
A. ①③ B. ①② C. ①③④ D. ①②③④
- 画法几何创始人——法国数学家加斯帕尔·蒙日发现：与椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 相切的两条垂直切线的交点轨迹为 $E: x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ，这个轨迹是以椭圆中心为圆心的圆，我们通常把这个圆称为该椭圆的蒙日圆。下列结论不正确的是



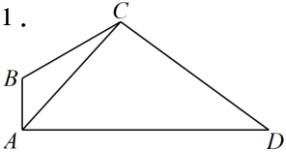
(第 11 题图)

- A. 已知椭圆 C 的长轴长为 4，离心率为 $e = \frac{1}{2}$ ，则椭圆 C 的“蒙日圆” E 的方程为： $x^2 + y^2 = 7$
- B. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， A, B 为椭圆 C 上的两个动点，直线 $l: bx + ay - a^2 - b^2 = 0$ 上任一点 P ，有 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} > 0$
- C. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ，现将质点 P 随机投入椭圆 C 所对应的蒙日圆内，则质点落在椭圆外部的概率为 $1 - \frac{\sqrt{2}}{3}$ （椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积公式为 $S = ab\pi$ ）
- D. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ， F 为椭圆的右焦点， A 为椭圆上的一个动点，直线 $l: bx + ay - a^2 - b^2 = 0$ ，记点 A 到直线 l 距离为 d ，则 $d - |AF|$ 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}b - 2a$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知向量 $\vec{a} + \vec{b} = (1, 1)$ ， $\vec{a} - \vec{b} = (-3, 1)$ ， $\vec{c} = (1, 1)$ ，向量 \vec{a} 与 \vec{c} 的夹角 $\theta =$ _____.
14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} ， $f(x+1)$ 为偶函数， $f(0) = 1$ ，则 $f(2) =$ _____.
15. 记 $\langle x \rangle$ 表示与实数 x 最接近的整数，数列 $\{a_n\}$ 通项公式为 $a_n = \frac{1}{\langle \sqrt{n} \rangle} (n \in \mathbf{N}^*)$ ，其前 n 项和为 S_n ，则 $S_{33} =$ _____.
16. 已知函数 $f(x) = \sin x + \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$ ，则 $f(x)$ 的最小值是_____.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

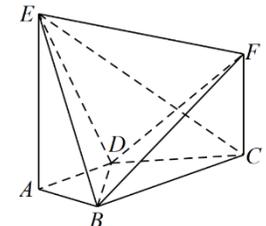
17. (10 分) 在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $\angle ABC = \frac{3\pi}{4}$ ， $AB \perp AD$ ， $AB = 1$.
- 
- (1) 若 $AC = \sqrt{5}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积；
- (2) 已知 $\cos \angle CAD = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ， $CD = \sqrt{13}$ ，求 AD 的长.
- (第 17 题图)
18. (12 分) 十九大以来，国家深入推进精准脱贫，加大资金投入，强化社会帮扶，为了更好的服务于人民，派调查组到某农村去考察和指导工作. 某学校为了研究学生对时事了解的情况，在网上随机抽取 120 名学生对精准脱贫政策的了解情况进行调查，其中男生与女生的人数之比为 11:13，其中男生 30 人对于精准脱贫政策了解，女生中有 25 人表示对精准脱贫政策不了解.
- (1) 完成 2×2 列联表，并回答能否有 90% 的把握认为对“精准脱贫政策了解与性别有关”；

	了解	不了解	总计
男生			
女生			
合计			120

- (2) 从对精准脱贫政策了解的学生中，利用分层抽样抽取 7 名学生，再在 7 名学生中抽取 3 名学生，作精准脱贫政策了解的政策讲解，其中抽取女生的个数为 ξ ，求 ξ 的分布列及期望值.

参考公式： $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$P(K^2 > k)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$ ， $S_{n+1} = S_n + 2a_n + 1$ ， $n \in \mathbf{N}^*$.
- (1) 求证：数列 $\{a_n + 1\}$ 是等比数列；
- (2) 数列 $\left\{ \frac{2^n}{a_n \cdot a_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n ， $n \in \mathbf{N}^*$ ，求证： $T_n < 1$.
20. (12 分) 如图， $AE \perp$ 平面 $ABCD$ ， $CF \parallel AE$ ， $AD \parallel BC$ ， $AD \perp AB$ ， $AB = AD = 1$ ， $AE = BC = 2$.
- 
- (1) 求证： $BF \parallel$ 平面 ADE ；
- (2) 若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\frac{1}{3}$ ，求三棱锥 $C-BDF$ 的体积.
21. (12 分) 已知函数 $f(x) = e^{x-1} - a \ln x + a \ln a$.
- (1) 当 $a = 1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；
- (2) 当 $a > 0$ 时，证明： $f(x) \geq a$.
22. (12 分) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，四点 $A(2, 1)$ ， $B(2, -1)$ ， $C(1, 1)$ ， $D(0, \sqrt{3})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.
- (1) 求 C 的方程；
- (2) 点 M, N 在 C 上，且 $AM \perp AN$ ，证明直线 MN 过定点.