2023—2024 学年高中毕业班阶段性测试(一)

理科数学 答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. B	2. D	3. A	4. C	5. B	6. A
7. B	8. C	9. B	10. C	11. D	12. D

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 4　　14. 54

15. 5　　16. $(\ln 3,+\infty)$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析** (Ⅰ)在$\triangle ACD$中,由正弦定理得$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AC}{\sin D}$,即$\dfrac{3}{\sin\angle CAD}=\dfrac{4}{\sin 60°}$, ………………………… (2 分)

所以$\sin\angle CAD=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$. ………………………… (4 分)

由题设知$\angle CAD<90°$,所以$\cos\angle CAD=\sqrt{1-\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{37}}{8}$. ………………………… (6 分)

(Ⅱ)由题设及(Ⅰ)知,$\cos\angle BAC=\sin\angle CAD=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, ………………………… (8 分)

在$\triangle ABC$中,由余弦定理得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\cos\angle BAC=\dfrac{75}{4}+16-2\times\dfrac{5\sqrt{3}}{2}\times 4\times\dfrac{3\sqrt{3}}{8}=\dfrac{49}{4}$, ………………………… (10 分)

所以$BC=\dfrac{7}{2}$. ………………………… (12 分)

18. **解析** (Ⅰ)在$\triangle ABC$中,因为E,F分别是BC,AC的中点,

所以$AB\parallel EF$. ………………………… (1 分)

因为$AC\parallel A_1C_1$,$AF=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}A_1C_1=DC_1$,

所以四边形AFC_1D为平行四边形,所以$AD\parallel FC_1$, ………………………… (3 分)

又因为$AD\cap AB=A$,$FE\cap FC_1=F$, ………………………… (4 分)

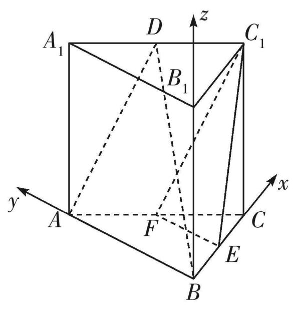
所以平面$ABD\parallel$平面FEC_1. ………………………… (5 分)

(Ⅱ)因为$AC=2$,$CB=1$,$\angle ACB=60°$,由余弦定理可得$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos\angle ACB=3$,

所以$AB^2+BC^2=AC^2$,从而$AB\perp BC$.

以B为坐标原点,$\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BB_1}$的方向分别为$x$轴、$y$轴、$z$轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系$B-xyz$.

………………………… (6 分)



故 $B(0,0,0)$, $A(0,\sqrt{3},0)$, $D\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$, $C(1,0,0)$.

从而 $\overrightarrow{BA}=(0,\sqrt{3},0)$, $\overrightarrow{BD}=\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},2\right)$, $\overrightarrow{AC}=(1,-\sqrt{3},0)$. ……………………(7分)

设平面 ABD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0,\\ \frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+2z=0,\end{cases}$ ……………………(9分)

取 $x=4$，则 $\boldsymbol{n}=(4,0,-1)$ 为平面 ABD 的一个法向量，……………………(10分)

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{4}{\sqrt{17}\times2}=\frac{2\sqrt{17}}{17}$，……………………(11分)

所以直线 AC 与平面 ABD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{17}}{17}$. ……………………(12分)

19. **解析**　(Ⅰ)由 $F(2,0)$ 得 C 的半焦距为 $c=2$，……………………(1分)

所以 $a^2=b^2+4$，……………………(2分)

又 C 过点 $(2,3)$，

所以 $\frac{4}{b^2+4}+\frac{9}{b^2}=1$，解得 $b^2=12$，……………………(3分)

所以 $a^2=16$, $a=4$，……………………(4分)

故 C 的离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$. ……………………(5分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知 C 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$. 设 $M(x_1,y_1)$, $N(x_2,y_2)$, $P(8,y_0)$.

由题意可得直线 MN 的方程为 $y=x-2$，……………………(6分)

联立 $\begin{cases}y=x-2,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\end{cases}$ 消去 y 可得 $7x^2-16x-32=0$，

则 $x_1+x_2=\frac{16}{7}$, $x_1x_2=-\frac{32}{7}$，……………………(7分)

则 $k_{PM}+k_{PN}=\frac{y_0-y_1}{8-x_1}+\frac{y_0-y_2}{8-x_2}=\frac{(y_0-x_1+2)(8-x_2)+(y_0-x_2+2)(8-x_1)}{(8-x_1)(8-x_2)}$ ……………………(8分)

$=\frac{16y_0+32+2x_1x_2-(y_0+10)(x_1+x_2)}{64+x_1x_2-8(x_1+x_2)}$

$=\frac{16y_0+32+2\left(-\frac{32}{7}\right)-\frac{16}{7}(y_0+10)}{64-\frac{32}{7}-8\times\frac{16}{7}}$ ……………………(9分)

$=\frac{y_0}{3}$，……………………(10分)

又 $k_{PF}=\frac{y_0-0}{8-2}=\frac{y_0}{6}$，……………………(11分)

因此 $k_{PM}+k_{PN}=2k_{PF}$. ……………………(12分)

20. **解析**　(Ⅰ)由题意知 $f(p)=3p^2(1-p)$, $0<p<1$，……………………(1分)

则 $f'(p)=-9p^2+6p=3p(2-3p)$，

当$0<p<\frac{2}{3}$时,$f'(p)>0$,当$\frac{2}{3}<p<1$时,$f'(p)<0$,

所以当$p=\frac{2}{3}$时,$f(p)$取最大值,即$p_0=\frac{2}{3}$. ……………………………………………… (4分)

(Ⅱ)(ⅰ)小李第一次考试3个科目都合格的概率为$P_1=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$, ……………………… (5分)

小李第一次考试有2个科目合格,补考1个科目且合格的概率为$P_2=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$, …… (6分)

小李第一次考试有1个科目合格,补考2个科目且均合格的概率为$P_3=3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{81}$,

…………………………………………………………………………………………… (7分)

所以小李这项资格考试过关的概率为$P=P_1+P_2+P_3=\frac{56}{81}$. ……………………………… (8分)

(ⅱ)X的所有可能取值为60,80,100, ……………………………………………………… (9分)

则$P(X=60)=\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{3}$,$P(X=80)=3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$,

$P(X=100)=3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$, ……………………………………………… (11分)

故$E(X)=60\times\frac{1}{3}+80\times\frac{4}{9}+100\times\frac{2}{9}=\frac{700}{9}$. ……………………………………… (12分)

21. **解析** (Ⅰ)当$x\in(0,\pi)$时,$\sin x>0$,所以由$\frac{me^x}{\sin x}\geqslant 1$,可得$m\geqslant\frac{\sin x}{e^x}$.

令$g(x)=\frac{\sin x}{e^x}$,则$g'(x)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}$, ……………………………………………… (1分)

令$g'(x)=0$,则$\sin x=\cos x$,而$x\in(0,\pi)$,得$x=\frac{\pi}{4}$. ……………………………………… (2分)

故当$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$时,$g'(x)>0$,当$x\in\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$时,$g'(x)<0$, ……………………………… (3分)

故$g(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$上单调递减,

故$[g(x)]_{\max}=g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$, ……………………………………………… (4分)

所以m的取值范围为$\left[\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}},+\infty\right)$. ……………………………………………… (5分)

(Ⅱ)易知$f(x)\neq 0$,所以$f(x_1)=f(x_2)$,等价于$\frac{1}{f(x_1)}=\frac{1}{f(x_2)}$,等价于$g(x_1)=g(x_2)$. ………………… (6分)

不妨设$x_1<x_2$,由(Ⅰ)可知$0<x_1<\frac{\pi}{4}<x_2$.

要证$x_1+x_2>\frac{\pi}{2}$,即证$x_2>\frac{\pi}{2}-x_1>\frac{\pi}{4}$,又因为$g(x)$在$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$上单调递减,所以需证$g(x_2)<g\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$,即

$g(x_1)<g\left(\frac{\pi}{2}-x_1\right)$. ……………………………………………………………… (8分)

令$h(x)=g(x)-g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$,

则$h'(x)=g'(x)+g'\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{\cos x-\sin x}{e^x}+\frac{\sin x-\cos x}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}$

$=(\cos x-\sin x)\left(\dfrac{1}{e^{x}}-\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}\right)$, ………………………………………………………… (10分)

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$时,$\cos x-\sin x>0$,$\dfrac{1}{e^{x}}>\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{2}-x}}$,所以 $h'(x)>0$,

则 $h(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$上单调递增,所以 $h(x_1)<h\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$,即 $g(x_1)<g\left(\dfrac{\pi}{2}-x_1\right)$,

因此,$x_1+x_2>\dfrac{\pi}{2}$. ………………………………………………………………………… (12分)

22. **解析** (Ⅰ)由曲线 C 的参数方程消去参数 α,得普通方程为$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=6$. ……………… (2分)

因为 $\rho\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)=1$,所以$\dfrac{\sqrt{3}\rho\sin\theta}{2}-\dfrac{\rho\cos\theta}{2}=1$,将 $\rho\cos\theta=x$,$\rho\sin\theta=y$ 代入得$\sqrt{3}y-x=2$. ……… (4分)

(Ⅱ)由于直线 l 与 x 轴的交点坐标为$(-2,0)$,倾斜角为$\dfrac{\pi}{6}$, …………………………………………… (5分)

所以直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=-2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\dfrac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), ……………………………………………… (6分)

代入$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=6$,得 $t^2-4\sqrt{3}t+6=0$,

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2,则 $t_1+t_2=4\sqrt{3}$,$t_1t_2=6$, ……………………………………………… (8分)

所以$|PA|^2+|PB|^2=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=36$. ……………………………………………… (10分)

23. **解析** (Ⅰ)由$f(x)+2\leqslant g(x)$,可得$2|x+1|+2\leqslant 4+|2x-1|$, ……………………………………… (1分)

当 $x\geqslant\dfrac{1}{2}$时,原不等式可化为$2(x+1)+2\leqslant 4+(2x-1)$,化简得$4\leqslant 3$,不成立; ……………………… (2分)

当$-1<x<\dfrac{1}{2}$时,原不等式可化为$2(x+1)+2\leqslant 4-(2x-1)$,解得 $x\leqslant\dfrac{1}{4}$,故$-1<x\leqslant\dfrac{1}{4}$; ………… (3分)

当 $x\leqslant -1$ 时,原不等式可化为$-2(x+1)+2\leqslant 4-(2x-1)$,化简得$0\leqslant 5$,恒成立,故 $x\leqslant -1$. ……… (4分)

综上可知 x 的取值范围为$\left(-\infty,\dfrac{1}{4}\right]$. ……………………………………………………………… (5分)

(Ⅱ)因为$f(x)+g(x)=|2x+2|+4+|2x-1|\geqslant|2x+2-(2x-1)|+4=7$, ……………………… (7分)

由题可知关于 x 的不等式$f(x)+g(x)\geqslant 2a^2-13a$ 的解集为 $\mathbf{R}$,所以$7\geqslant 2a^2-13a$, ……………………… (8分)

解得$-\dfrac{1}{2}\leqslant a\leqslant 7$.

故实数 a 的取值范围是$\left[-\dfrac{1}{2},7\right]$. ………………………………………………………………… (10分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。