

高三数学试题参考答案

1. D 【解析】本题考查集合的运算,考查数学运算的核心素养.

因为 $A = \{-3, -1, 1, 3, 5\}$, $B = \{x | -1 < x < 5\}$, 所以 $A \cap B = \{1, 3\}$.

2. B 【解析】本题考查复数的有关概念,考查数学运算的核心素养.

因为 $\frac{a+i}{2-4i} = \frac{(a+i)(2+4i)}{20} = \frac{2a-4+(4a+2)i}{20}$, 所以 $2a-4=0$, 所以 $a=2$.

3. C 【解析】本题考查解三角形的知识,考查数学运算的核心素养.

因为 $A+B = \frac{5\pi}{6}$, 所以 $C = \frac{\pi}{6}$, 由 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$, 得 $\frac{3}{\sin A} = 4$, 所以 $\sin A = \frac{3}{4}$.

4. A 【解析】本题考查函数的图象和性质,考查逻辑推理与直观想象的核心素养.

$f(x)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 因为 $f(-x) = (-x + \frac{1}{x}) \sin(-x) = (x - \frac{1}{x}) \sin x = f(x)$, 所以

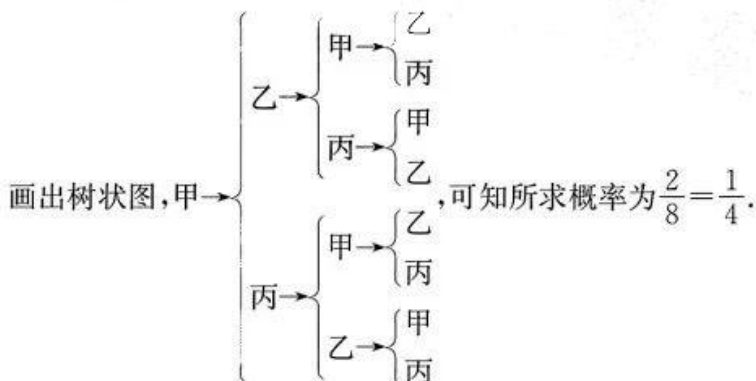
$f(x)$ 为偶函数, 排除 B, D. 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) < 0$, 故选 A. 来源: 高三答案公众号

5. D 【解析】本题考查直线与圆的位置关系,考查数学运算与直观想象的核心素养.

因为圆 O 与圆 C 外切, 所以 $r^2 = 4$. 设圆心 $C(3, 0)$ 到直线 l 的距离为 d , 则 $d = \frac{|3-5|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

从而 $|AB| = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{2}$.

6. C 【解析】本题考查古典概型,考查数学运算的核心素养.



7. B 【解析】本题考查球面与柱体侧面的交线长度,考查直观想象与数学运算的核心素养.

设 D_1 为 A_1B_1 的中点, 连接 C_1D_1 (图略), 可知 $C_1D_1 = \sqrt{3}$, $C_1D_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 由

$\sqrt{(\frac{\sqrt{39}}{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, 得题中所求交线即以 D_1 为圆心, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 为半径的圆弧, 设该圆弧与

AA_1, BB_1 分别相交于点 M, N , 经计算可知 $\angle MD_1N = \frac{2\pi}{3}$, 故交线长 $l = \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$.

8. B 【解析】本题考查双曲线的性质,考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

由已知得 $\frac{|F_1Q|}{|F_2Q|} = \frac{5}{3}$, 因为 PQ 平分 $\angle F_1PF_2$, 所以 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|} = \frac{|F_1Q|}{|F_2Q|} = \frac{5}{3}$, 所以 $\frac{\frac{b^2}{a} + 2a}{\frac{b^2}{a}} = \frac{5}{3}$, 整

理得 $b^2 = 3a^2$, 由 $c^2 - a^2 = 3a^2$, 得 $c^2 = 4a^2$, 所以 $e = \frac{c}{a} = 2$.

9. AC 【解析】本题考查三角恒等变换和基本不等式, 考查数学运算的核心素养.

对于 A, $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = -\frac{7}{9}$, A 正确; 来源: 高三答案公众号

对于 B, 因为 $\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{4}{3}$, 所以 $\tan\theta = \frac{1}{2}$ 或 $\tan\theta = -2$, B 错误;

令 $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 易知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以当 $x \geq \frac{1}{2}$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 2, 当 $0 < x \leq \frac{1}{2}$ 时, $x + \frac{1}{x}$ 的最小值为 $\frac{5}{2}$, C 正确, D 错误.

10. BD 【解析】本题考查统计的知识, 考查数据分析与数学运算的核心素养.

由雷达图可知, 400 米跑项目中, 甲的得分比乙的得分高, A 错误; 由图可知, B 正确; 甲各项得分的波动较大, 乙的各项得分均在 $(600, 800]$ 内, 波动较小, C 错误; 甲的各项得分的极差约为 $1000 - 470 = 530$, 乙的各项得分的极差小于 200, D 正确.

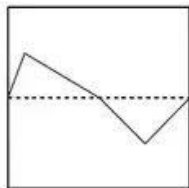
11. AC 【解析】本题考查新定义以及函数的性质, 考查逻辑推理的核心素养.

对于 A, 易知函数 $f(x)$ 为奇函数, 所以函数 $f(x)$ 可以是中心为原点且边长为 2 的正方形的“优美函数”, 故 A 正确.

对于 B, 令 $2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 得 $x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$, 所以函数 $f(x) = 4\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$ 图象的对称中心为 $(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, 3) (k \in \mathbf{Z})$, 故以 $(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, 3) (k \in \mathbf{Z})$ 为中心的正方形都能被函数 $f(x) = 4\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$ 的图象平分, 即 $f(x) = 4\cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 3$ 可以同时是无数个正方形的“优美函数”, 故 B 错误.

对于 C, 令 $g(x) = \ln(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x)$, 易知函数 $g(x)$ 为奇函数. 又因为函数 $f(x)$ 的图象是由函数 $g(x)$ 的图象向下平移一个单位长度得到的, 所以函数 $f(x)$ 图象的对称中心为 $(0, -1)$, 故以 $(0, -1)$ 为中心的正方形都能被函数 $f(x) = \ln(\sqrt{4x^2 + 1} - 2x) - 1$ 的图象平分, 故 C 正确.

对于 D, 如图所示, 可知 D 错误.



12. ACD 【解析】本题考查不等关系, 考查逻辑推理与数学运算的核心素养.

因为 $x^2 = y^3 < 1$, 所以 $y = x^{\frac{2}{3}} < 1$, 所以 $0 < x < y < 1$, A 正确, B 错误;

令 $g(x) = |y - x| = y - x = x^{\frac{2}{3}} - x$, 则 $g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1$, 当 $0 < x < \frac{8}{27}$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$

单调递增, 当 $x > \frac{8}{27}$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(\frac{8}{27}) = \frac{4}{27}$, C 正确;

令 $h(x) = |y^2 - x^2| = y^2 - x^2 = x^{\frac{4}{3}} - x^2$, 则 $h'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} - 2x$, 可知当 $0 < x < \frac{2\sqrt{6}}{9}$ 时, $h(x)$

【高三数学·参考答案 第 2 页(共 7 页)】

单调递增,当 $x > \frac{2\sqrt{6}}{9}$ 时, $h(x)$ 单调递减,所以 $h(x)_{\max} = h(\frac{2\sqrt{6}}{9}) = \frac{4}{27}$, D 正确.

13. 1 或 -5 【解析】本题考查平面向量的平行,考查数学运算的核心素养.

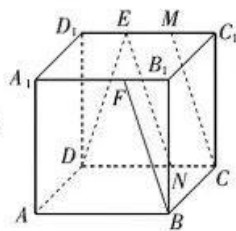
因为 $a \parallel b$, 所以 $m(m+2) - (5-2m) = 0$, 整理得 $m^2 + 4m - 5 = 0$, 解得 $m = 1$ 或 $m = -5$.

14. $\frac{4}{5}$ 【解析】本题考查立体几何初步的知识,考查直观想象的核心素养.

在棱 CD, C_1D_1 上分别取点 N, M , 使得 $CN = \frac{1}{3}CD, C_1M = \frac{1}{3}C_1D_1$, 连接 CM, NE , 可知 $BF \parallel CM \parallel NE$, 则 $\angle DEN$ 为直线 DE 与 BF 所成的角.

设 $AB = 3$, 在 $\triangle DEN$ 中, 易得 $DE = \sqrt{10}, NE = \sqrt{10}, DN = 2$, 设

$\angle DEN = \theta$, 则 $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$, 从而 $\cos \theta = 1 - 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$.



15. $x^2 = 2y; \frac{3}{2}$ (答案不唯一, 只要 $0 < p < 2$, 且所求距离为 $\frac{4}{2} - \frac{p}{2}$ 即可) 【解析】本题考查抛物线的定义及性质,考查直观想象的核心素养.

易知过焦点的弦中, 通径最短, 所以 $2p < 4$, 解得 $0 < p < 2$. 设该弦所在的直线与 C 的交点分别为 A, B , 则弦 AB 的中点到 x 轴的距离为 $\frac{|AB|}{2} - \frac{p}{2}$. 取 $p = 1$, 则抛物线 C 的方程为 $x^2 =$

$2y$, 此时弦 AB 的中点到 x 轴的距离为 $\frac{3}{2}$.

16. 8 【解析】本题考查逻辑推理,考查数学建模的核心素养以及分类讨论的数学思想.

因为 $20 < 23$, 所以至少要进行一次“乘以 2”的运算.

(i) 若一共只有一次“乘以 2”的运算.

设做了 k 次“减去 3”的运算之后, 再“乘以 2”, 再做了 t 次“减去 3”的运算后, 得数为 $(20 - 3k) \times 2 - 3t = 23$, 即 $6k + 3t = 17$, 其中 $k, t \in \mathbf{N}$, 显然无非负整数解.

(ii) 若一共只有 2 次“乘以 2”的运算.

设做了 k 次“减去 3”的运算之后“乘以 2”, 再做了 t 次“减去 3”的运算之后“乘以 2”, 再做了 m 次“减去 3”的运算后, 得数是 $[(20 - 3k) \times 2 - 3t] \times 2 - 3m = 23$, 即 $4k + 2t + m = 19, k, t, m$

$\in \mathbf{N}$. 当 $k = 4$ 时, $\begin{cases} t = 1, \\ m = 1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} t = 0, \\ m = 3; \end{cases}$ 当 $k = 3$ 时, $t + m > \frac{2t + m}{2} = \frac{7}{2}$; 当 $k \leq 2$ 时, $t + m > \frac{2t + m}{2}$

$\geq \frac{11}{2}$. 所以 $k + t + m$ 的最小值为 6, 即至少运算 8 次, 过程为 $[(20 - 3 - 3 - 3 - 3) \times 2 - 3] \times 2$

$- 3 = 23$.

(iii) 若一共有 3 次或 3 次以上“乘以 2”的运算, 总运算次数显然不止 8 次.

17. 解: (1) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $a_2 = 4, 2a_4 - a_5 = 7$,

所以 $2(4 + 2d) - (4 + 3d) = 7$, 解得 $d = 3$, 从而 $a_1 = 1$, 1 分

所以 $a_n = 3n - 2$ 3 分

【高三数学·参考答案 第 3 页(共 7 页)】

设 $\{b_n\}$ 的公比为 q , 因为 $b_4 + b_5 = 8(b_1 + b_2)$, 所以 $\frac{b_4 + b_5}{b_1 + b_2} = q^3 = 8$, 解得 $q = 2$, 4分

因为 $b_3 = 4$, 所以 $b_1 = \frac{4}{2^2} = 1$, 5分

所以 $b_n = 2^{n-1}$ 6分

(2) 因为 $c_n = \frac{3}{(3n-2)(3n+1)} + 2^{n-1}$, 所以 $c_n = \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} + 2^{n-1}$, 8分

所以 $S_n = (1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}) + (1 + 2 + \dots + 2^{n-1})$, 9分

所以 $S_n = (1 - \frac{1}{3n+1}) + \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - \frac{1}{3n+1}$ 10分

18. 解: (1) $\mu = 35 \times 0.025 + 45 \times 0.15 + 55 \times 0.2 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.225 + 85 \times 0.1 + 95 \times 0.05 = 65$, 2分

$\sigma^2 = (35-65)^2 \times 0.025 + (45-65)^2 \times 0.15 + (55-65)^2 \times 0.2 + 0 + (75-65)^2 \times 0.225 + (85-65)^2 \times 0.1 + (95-65)^2 \times 0.05 = 210$, 3分

所以 $\sigma \approx 14.5, X \sim N(65, 14.5^2)$,

所以 $P(50.5 < X \leq 94) = P(\mu - \sigma < X \leq \mu + 2\sigma) = \frac{0.9545}{2} + \frac{0.6827}{2} = 0.8186$ 4分

(2) ξ 的可能取值为 10, 20, 30, 40.

$P(X \leq 55) = \frac{3}{8}, P(X > 55) = \frac{5}{8}$, 5分

$P(\xi = 10) = \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{32}$,

$P(\xi = 20) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{57}{128}$, 7分

$P(\xi = 30) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times 2 = \frac{15}{64}$,

$P(\xi = 40) = \frac{5}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{128}$, 9分

所以 ξ 的分布列为

ξ	10	20	30	40
P	$\frac{9}{32}$	$\frac{57}{128}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{128}$

..... 10分

$E(\xi) = 10 \times \frac{9}{32} + 20 \times \frac{57}{128} + 30 \times \frac{15}{64} + 40 \times \frac{5}{128} = \frac{325}{16}$, 11分

故此次抽奖要准备的学习用品的价值总额约为 $320 \times \frac{325}{16} = 6500$ 元. 12分

19. (1) 证明: 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $BC=AD=1$, $AB=2$,

过点 C 作 $CE \perp AB$ 于 E (图略), 则 $BE = \frac{1}{2}$, 可知 $\angle ABC = 60^\circ$, 2 分

由余弦定理知 $AC^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$,

则 $AC^2 + BC^2 = AB^2$, 所以 $AC \perp BC$ 4 分

又 $AC \perp PC$, $BC \cap PC = C$, $BC, PC \subset$ 平面 PBC , 所以 $AC \perp$ 平面 PBC 5 分

又 $ACC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以平面 $ABCD \perp$ 平面 PBC 6 分

(2) 解: 以 C 为坐标原点, $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ 的方向分别为 x 轴、 y 轴的正方向建立空间直角坐标系. 来源: 高三答案公众号

因为 $AC \perp$ 平面 PBC , $PB \perp BC$, 所以 $A(\sqrt{3}, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $P(0, 1,$

$2\sqrt{3})$, $D(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $\overrightarrow{CD} = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$, $\overrightarrow{CP} = (0, 1, 2\sqrt{3})$, $\overrightarrow{PA} = (\sqrt{3},$

$-1, -2\sqrt{3})$ 8 分

设平面 PCD 的法向量为 $n = (x, y, z)$,

则 $\begin{cases} \overrightarrow{CD} \cdot n = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0, \\ \overrightarrow{CP} \cdot n = y + 2\sqrt{3}z = 0, \end{cases}$ 取 $n = (1, \sqrt{3}, -\frac{1}{2})$ 10 分

设直线 PA 与平面 PCD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{PA}, n \rangle| = \frac{|\sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{3}|}{4 \times \frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{\sqrt{51}}{34}$,

即直线 PA 与平面 PCD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{51}}{34}$ 12 分

20. 解: (1) 由 $\frac{2\pi}{\omega} = \pi$, 得 $\omega = 2$, 1 分

所以 $f(x) = 2\sin[2(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6})$, 2 分

令 $2x - \frac{\pi}{6} = k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, 3 分

取 $k=0$, 得 $x = \frac{\pi}{3}$, 取 $k=-1$, 得 $x = -\frac{\pi}{6}$, 4 分

因为 $|\frac{\pi}{3}| < |-\frac{\pi}{6}|$, 所以与 y 轴距离最近的对称轴方程为 $x = -\frac{\pi}{6}$ 5 分

(2) 由已知得 $f(x) = 2\sin[\omega(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{6}] = 2\sin[\omega x + \frac{(1-\omega)\pi}{6}]$,

令 $\omega x + \frac{(1-\omega)\pi}{6} = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, 解得 $x = \frac{6k + \omega - 1}{6\omega}\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ 7 分

因为 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ 上有且仅有一个零点, 所以

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \leq \frac{6k+\omega-1}{6\omega} \pi \leq \frac{3\pi}{2}, \\ \frac{6k+\omega-7}{6\omega} \pi < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{6k+\omega+5}{6\omega} \pi > \frac{3\pi}{2}, \\ k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} \frac{6k-1}{8} \leq \omega \leq \frac{6k-1}{2}, \\ \frac{6k-7}{2} < \omega < \frac{6k+5}{8}, \\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

因为 $\omega > 0$, 所以

$$\begin{cases} \frac{6k-1}{2} > 0, \\ \frac{6k-1}{2} - \frac{6k-1}{8} \geq 0, \\ \frac{6k+5}{8} - \frac{6k-7}{2} > 0, \\ k \in \mathbf{Z}. \end{cases} \text{解得 } \frac{1}{6} < k < \frac{33}{18}, k \in \mathbf{Z}, \text{ 所以 } k=1, \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

所以

$$\begin{cases} \frac{5}{8} \leq \omega \leq \frac{5}{2}, \\ -\frac{1}{2} < \omega < \frac{11}{8}, \end{cases} \text{解得 } \frac{5}{8} \leq \omega < \frac{11}{8}, \text{ 即 } \omega \text{ 的取值范围为 } [\frac{5}{8}, \frac{11}{8}). \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

21. 解: (1) 由 $e^2 = \frac{2}{3} = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, 得 $a^2 = 3b^2$, 1分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 2分

把点 $(\sqrt{3}, 1)$ 的坐标代入上式, 得 $\frac{3}{3b^2} + \frac{1}{b^2} = 1$, 可得 $b^2 = 2$, 3分

所以 $a^2 = 6, c = 2$, 故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 4分

(2) 由(1)知焦点 F 的坐标为 $(2, 0)$, 若直线 l 的斜率为 0, 则 O, A, B 三点不能构成三角形, 所以直线 l 的斜率不为 0, 设直线 l 的方程为 $x = my + 2$,

联立方程组 $\begin{cases} x = my + 2, \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1, \end{cases}$ 消去 x , 得 $(m^2 + 3)y^2 + 4my - 2 = 0$, 5分

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{4m}{m^2 + 3}, y_1 y_2 = -\frac{2}{m^2 + 3}$, 6分

$$\begin{aligned} S_{\triangle OAB} &= \frac{1}{2} |OF| \cdot |y_1 - y_2| = |y_1 - y_2| = \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{(-\frac{4m}{m^2 + 3})^2 + 4 \times \frac{2}{m^2 + 3}} \\ &= \frac{2\sqrt{6}\sqrt{m^2 + 1}}{m^2 + 3}. \dots\dots\dots 8 \text{分} \end{aligned}$$

令 $\sqrt{m^2+1}=t(t \geq 1)$, 则 $S_{\triangle OAB} = \frac{2\sqrt{6}t}{t^2+2} = \frac{2\sqrt{6}}{t+\frac{2}{t}} \leq \frac{2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, 当且仅当 $t=\sqrt{2}$ 时, 等号成立, 即

$\triangle OAB$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$ 10 分

令 $\sqrt{m^2+1}=\sqrt{2}$, 解得 $m=\pm 1$, 所以此时直线 l 的方程为 $x-y-2=0$ 或 $x+y-2=0$

..... 12 分

22. (1) 证明: 令 $h(x)=f'(x)=e^x-\sin x-\cos x$, 则 $h'(x)=e^x-\cos x+\sin x$ 1 分

当 $0 \leq x < \pi$ 时, $h'(x)=e^x-\cos x+\sin x \geq 1-\cos x+\sin x \geq 0$, 2 分

当 $x \geq \pi$ 时, $h'(x)=e^x-\cos x+\sin x \geq e^x-\cos x+\sin x > 1-\cos x+1+\sin x \geq 0$, 3 分

即当 $x \geq 0$ 时, $h'(x) \geq 0$, 所以 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f'(x)=h(x) \geq h(0)=0$,

故当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$ 成立. 4 分

(2) 解: $g(x)=0$, 即 $e^{2x-\frac{\pi}{2}}[f(x)+f(2x)-e^{2x}]-1=0$,

所以 $f(x)=e^{\frac{\pi}{2}-2x}-f(2x)+e^{2x}=e^{\frac{\pi}{2}-2x}+\sin 2x-\cos 2x$

$=e^{\frac{\pi}{2}-2x}+\cos(\frac{\pi}{2}-2x)-\sin(\frac{\pi}{2}-2x)=f(\frac{\pi}{2}-2x)$ 5 分

设 $t(x)=f(x)-f(\frac{\pi}{2}-2x)$, 由(1)可知当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $f(x) \geq f(0)=2$.

下面证明: 当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=e^x+\cos x-\sin x \leq 2$, 即证 $\frac{2+\sin x-\cos x}{e^x} \geq 1$.

设 $\varphi(x)=\frac{2+\sin x-\cos x}{e^x}$, 则 $\varphi'(x)=\frac{2\cos x-2}{e^x} \leq 0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调递减, 从而 $\varphi(x) \geq \varphi(0)=1$, 即当 $x \leq 0$ 时, $f(x)=e^x+\cos x-\sin x \leq 2$ 6 分

当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时, $x=\frac{\pi}{2}-2x, t(x)=f(x)-f(\frac{\pi}{2}-2x)=0$, 所以 $\frac{\pi}{6}$ 是 $g(x)$ 的零点; 7 分

当 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 时, $\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}-2x < \frac{\pi}{2}, f(x) < f(\frac{\pi}{2}-2x)$, 即 $t(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上无零点; 8 分

当 $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $0 < \frac{\pi}{2}-2x < \frac{\pi}{6}, f(x) > f(\frac{\pi}{2}-2x)$, 即 $t(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4})$ 上无零点; 9 分

当 $x \geq \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\pi}{2}-2x \leq 0$, 所以 $f(x) > 2, f(\frac{\pi}{2}-2x) \leq 2$, 即 $t(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, +\infty)$ 上无零点; 10 分

当 $x \leq 0$ 时, $\frac{\pi}{2}-2x \geq \frac{\pi}{2}$, 所以 $f(\frac{\pi}{2}-2x) \geq f(\frac{\pi}{2}) > f(0)=2 \geq e^x+\cos x-\sin x=f(x)$, 即 $t(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上无零点. 11 分

综上, $g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上只有 1 个零点. 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线