

临沂一中 2021 级高二上学期期末检测

数学试题

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1. 已知空间向量 $\vec{a} = (2, -3, 4)$, $\vec{b} = (-4, m, n)$, $m, n \in \mathbb{R}$, 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则 $m - n =$ ()

- A. 2 B. -2 C. 14 D. -14

2. 设直线 l 的斜率为 k , 且 $-1 \leq k < \sqrt{3}$, 直线 l 的倾斜角 α 的取值范围为 ()

- A. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ B. $\left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$
C. $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}\right)$ D. $\left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$

3. 抛物线 $y = ax^2$ 的准线方程为 $y = 1$, 则 a 的值为 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. -2 C. $-\frac{1}{4}$ D. -4

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项积 T_n 满足 $\frac{T_7}{T_2} = 32$, 则 $T_9 =$ ()

- A. 128 B. 256 C. 512 D. 1024

5. 由伦敦著名建筑事务所 Steyn Studio 设计的南非双曲线大教堂惊艳世界, 该建筑是数学与建筑完美结合造就的艺术品. 若将如图所示的大教堂外形弧线的一段近似看成双曲线

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 下支的一部分, 且此双曲线的下焦点到渐近线的距离为 2, 离心率

为 2, 则该双曲线的方程为 ()



- A. $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{4} = 1$ B. $\frac{3y^2}{4} - \frac{x^2}{4} = 1$
C. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ D. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

6. 若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则“ $S_{2024} < 0, S_{2025} > 0$ ”是“ $a_{1012} \cdot a_{1013} < 0$ ”的 ()

- A. 充要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分不必要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 设点 P 是抛物线 $C_1: x^2 = 4y$ 上的动点, 点 M 是圆 $C_2: (x-5)^2 + (y+4)^2 = 4$ 上的动点, d 是点 P

到直线 $y=-2$ 的距离,则 $d+|PM|$ 的最小值是 ()

- A. $5\sqrt{2}-2$ B. $5\sqrt{2}-1$ C. $5\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{2}+1$

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 与双曲线 $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1$ ($m > 0, n > 0$) 具有相同焦

点 F_1, F_2 , P 是它们的一个交点, 则 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$, 记椭圆去双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 ,

则 $3e_1^2 + e_2^2$ 的最小值是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、多选题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

9. 对于非零空间向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, 现给出下列命题, 其中为真命题的是 ()

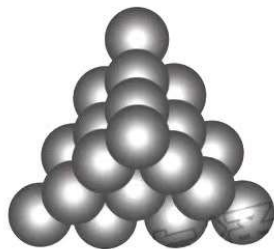
- A. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 则 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角是钝角
B. 若 $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-1, -1, 1)$, 则 $\vec{a} \perp \vec{b}$
C. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c}$, 则 $\vec{a} = \vec{c}$
D. 若 $\vec{a} = (1, 0, 0), \vec{b} = (0, 2, 0), \vec{c} = (0, 0, 3)$, 则 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 可以作为空间中的一组基底

10. 已知曲线 $C: mx^2 + ny^2 = 1$. ()

- A. 若 $m > n > 0$, 则 C 是椭圆, 其焦点在 y 轴上
B. 若 $m = n > 0$, 则 C 是圆, 其半径为 $\sqrt{n}$
C. 若 $mn < 0$, 则 C 是双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \sqrt{-\frac{m}{n}}x$
D. 若 $m = 0, n > 0$, 则 C 是两条直线

11. 如图, 此形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中, 后人称为“三角垛”, “三角垛”最上层有 1 个球, 第二层有 3 个球, 第三层有 6 个球, 第四层有 10 个球, ...

设第 n 层有 a_n 个球, 从上往下 n 层球的总数为 S_n , 则 ()



- A. $S_6 = 56$

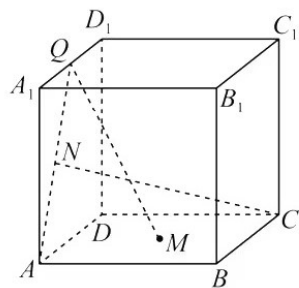
B. $a_{n+1} - a_n = n$

C. $a_{2023} = 1012 \times 2023$

D. $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{2023}} = \frac{2023}{1012}$

12. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为底面 $ABCD$ 的中心, Q 是棱 A_1D_1 上一点,

且 $\overrightarrow{D_1Q} = \lambda \overrightarrow{D_1A_1}$, $\lambda \in [0,1]$, N 为线段 AQ 的中点, 则下列命题正确的是 ()



A. CN 与 QM 异面

B. 三棱锥 $A-DMN$ 的体积跟 λ 的取值无关

C. 不存在 λ 使得 $AM \perp QM$

D. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 过 A, Q, M 三点的平面截正

方体所得截面的面积为 $\frac{9}{2}$

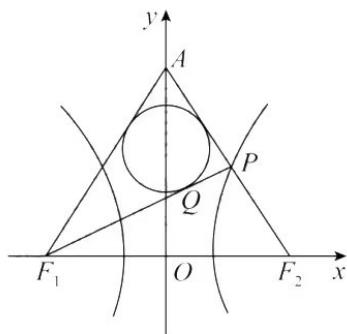
三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知两直线 $l_1: (m+2)x + (m+3)y - 5 = 0$, $l_2: 6x + (2m-1)y = 5$, 若 $l_1 \perp l_2$, 则实数 $m =$ _____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 2}$, 则 $a_{2023} =$ _____.

15. 已知平面 α 的一个法向量 $\vec{n} = (-2, -2, 1)$, 点 $A(-1, -3, 0)$ 在平面 α 内, 若点 $B(m, 0, 2-m)$ 在平面 α 内, 则 $m =$ _____.

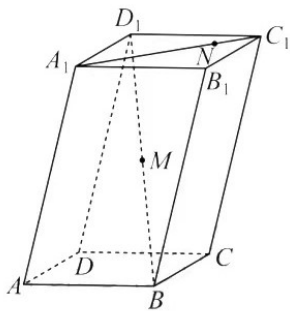
16. 如图, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , $|F_1F_2| = 6$, P 是双曲线右支上的一点, F_2P 与 y 轴交于点 A , $\triangle APF_1$ 的内切圆在边 PF_1 上的切点为 Q , 若 $|PQ| = 1$, 则双曲线的离心率是 _____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.

17. 如图所示，平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面是菱形， $AB=2$ ， $AA_1=4$ ，

$\angle DAB = \angle A_1AB = \angle DAA_1 = 60^\circ$ ， $\overrightarrow{A_1N} = 3\overrightarrow{NC_1}$ ， $\overrightarrow{D_1M} = \overrightarrow{MB}$ ，设 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.



(1) 试用 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 表示 $\overrightarrow{AM}$ ， $\overrightarrow{AN}$ ；

(2) 求 MN 的长度.

18. 已知直线 l 经过两条直线 $2x - y - 3 = 0$ 和 $4x - 3y - 5 = 0$ 的交点，且与直线 $x + y - 2 = 0$ 垂直.

(1) 求直线 l 的一般式方程；

(2) 若圆 C 的圆心为点 $(3, 0)$ ，直线 l 被该圆所截得的弦长为 $2\sqrt{2}$ ，求圆 C 的标准方程.

19. 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ ，其前 n 项和为 S_n ， $a_1 = 1$.

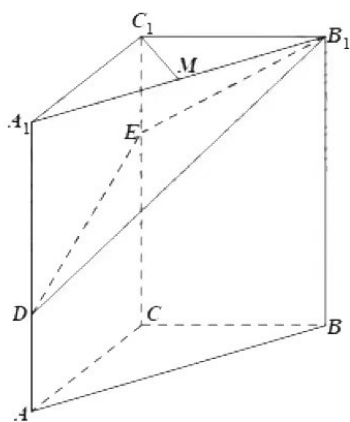
(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列， $S_{10} = 70$ ，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列， $a_1 = \frac{1}{8}$ ，求满足 $S_n > 100a_n$ 时 n 的最小值.

20. 如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC ， $AC \perp BC$ ， $AC = BC = 2$ ， $CC_1 = 3$ ，

点 D ， E 分别在棱 AA_1 和棱 CC_1 上，且 $AD = 1$ ， $CE = 2$ ， M 为棱 A_1B_1 的中点.

试卷第 4 页，共 6 页



(I) 求证: $C_1M \perp B_1D$;

(II) 求二面角 $B-B_1E-D$ 的正弦值;

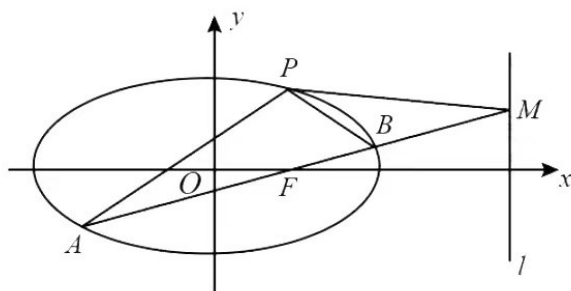
(III) 求直线 AB 与平面 DB_1E 所成角的正弦值.

21. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n = -2$ ($n \geq 2$ 且 $n \in \mathbb{N}^+$), 且 $a_2 = 4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\left\{ \frac{2^n}{(a_n - 1)(a_{n+1} - 1)} \right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{2}{3} \leq T_n < 1$.

22. 如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 经过点 $P(1, \frac{3}{2})$, 离心率 $e = \frac{1}{2}$, 直线 l 的方程为 $x = 4$.



(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) AB 是经过右焦点 F 的任一弦 (不经过点 P), 设直线 AB 与直线 l 相交于点 M , 记 PA , PB , PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 . 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_2 = \lambda k_3$? 若存在, 求 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线