府谷中学高二年级第二学期第二次月考·数学试题(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. C　由$(x-1)(x-4)<0$得$1<x<4$,所以$A=\{x|1<x<4\}$,$A\cup B=[-2,4)$.故选C.

2. A　由$(1-2i)z=5$,得$z=\frac{5}{1-2i}=\frac{5(1+2i)}{5}=1+2i$,故在复平面内$z$对应的点为$(1,2)$,在第一象限.故选A.

3. D　命题的否定是改变量词,否定结论,故"$\exists x_0\in\mathbf{R}$,$x_0^2+x_0+1>0$"的否定是"$\forall x\in\mathbf{R}$,$x^2+x+1\leqslant 0$".故选D.

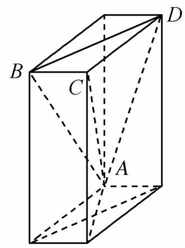
4. C　$T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r=(-1)^r C_6^r x^{6-3r}$,令$6-3r=0$,得$r=2$,所以$T_3=15$,即展开式的常数项为15.故选C.

5. A　$\frac{\sin 160^\circ\cos 20^\circ}{1-2\sin^2 25^\circ}=\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\cos 50^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ}{\sin 40^\circ}=\frac{1}{2}$.故选A.

6. D　在$\triangle ABC$中,因为$\cos A=\frac{3}{5}$,所以$\sin A=\frac{4}{5}$,由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得$\frac{a}{\frac{4}{5}}=\frac{12}{\frac{12}{13}}$,化简得$a=\frac{52}{5}$.故选D.

7. D　由题意,半衰期所用时间为50天,即$\frac{1}{2}M_0=M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{50}{h}}$,则$h=50$,所以质量为$M_0$的锶89经过30天衰减后,质量大约为$M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{50}}=M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0.6}=M_0\cdot\frac{1}{2^{0.6}}\approx M_0\times\frac{1}{1.516}=0.66M_0$.故选D.

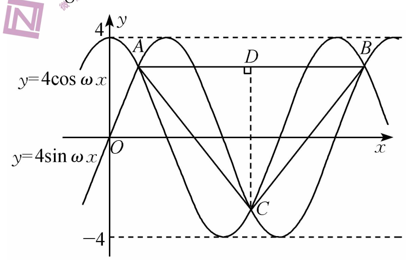
8. C　由三视图可知,该几何体为如图所示三棱锥$A-BCD$,则$V_{A\text{-}BCD}=\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times 1\times 2\right)\times 3=1$.故选C.



9. B　取C的一条渐近线方程为$bx-ay=0$,所以$\left(\frac{|-2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+(\sqrt{3})^2=4$,所以$a^2=3b^2$,即$a^2=3(c^2-a^2)$,所以$e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.故选B.

10. B　构造函数$f(x)=\ln x+1-x$,$f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$,当$0<x<1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以$f\left(\frac{1}{98}\right)>f\left(\frac{1}{99}\right)>f\left(\frac{1}{100}\right)$,即$a>b>c$.故选B.

11. A　作出函数$y=4\sin\omega x$和$y=4\cos\omega x$的图象,设两图象相邻的3个交点分别为A,B,C,如图所示,作$CD\perp AB$,垂足为D,易知$CD=4\sqrt{2}$,又$\triangle ABC$为等腰直角三角形,所以$AB=8\sqrt{2}$,所以$y=4\sin\omega x$的最小正周期$T=8\sqrt{2}$,即$\frac{2\pi}{\omega}=8\sqrt{2}$,所以$\omega=\frac{\sqrt{2}\pi}{8}$.故选A.



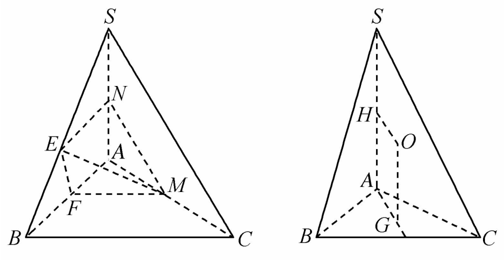
12. A　因为函数$y=f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$,且$f(-x)=-f(x)$,所以函数$y=f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,所以$f(0)=\log_2 a=0$,解得$a=1$,即当$x\in[0,1]$时,$f(x)=\log_2(x+1)$,$f(1)=\log_2 2=1$;因为$y=f(x+1)$为偶函数,所以$f(x+1)=f(-x+1)$,即$y=f(x)$的图象关于直线$x=1$对称,又$y=f(x)$满足$f(-x)=-f(x)$,所以$f(x+1)=-f(x-1)$,则$f(x+2)=-f(x)$,$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$,即函数$y=f(x)$是周期函数,周期为4,则$f(2\,022)+f(2\,023)=f(2)+f(3)=-f(0)-f(1)=-1$.故选A.

13. 3　设$\{a_n\}$的公比为q,当$a_2+a_3=0$时,$q=-1$(舍);当$a_2+a_3\neq 0$时,$q=3$.

14. $\frac{2\pi}{3}$　由$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=4\boldsymbol{a}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=12$,而$|\boldsymbol{a}|=1$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$,所以$8-8\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=12$,可得$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$,又$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$,所以$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{2\pi}{3}$.

15. $\frac{5}{2}$　由已知得 $F(0,1)$，设直线 l 的方程为 $y=kx+1$，代入 $x^2=4y$ 整理得 $x^2-4kx-4=0$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，故 $x_1+x_2=4k$①，$x_1x_2=-4$②，又 $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{FB}$，故 $x_1=-4x_2$③，由①②③解得 $k^2=\frac{9}{16}$，此时，$|AB|=y_1+y_2+2=k(x_1+x_2)+4=4(k^2+1)$，点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$，故△OAB 的面积为 $S=\frac{1}{2}AB\cdot d=2\sqrt{k^2+1}=\frac{5}{2}$.

16. $\frac{28}{3}\pi$　分别取 AC,SA,SB,AB 的中点 M,N,E,F，连接 MN,NE,EF,MF,ME，可得 $MN/\!/SC$，$NE/\!/AB$，所以 $\angle MNE$ 为异面直线 SC 与 AB 所成的角或其补角，所以 $\cos\angle MNE=\frac{\sqrt{2}}{4}$，或 $\cos\angle MNE=-\frac{\sqrt{2}}{4}$. 当 $\cos\angle MNE=\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，设 $SA=t$，可得 $MN=\frac{1}{2}\sqrt{t^2+4}$，$NE=1$，$EF=\frac{1}{2}t$，$MF=1$，则 $ME=\sqrt{\frac{t^2}{4}+1}$，在△$MNE$ 中，由余弦定理，可得 $ME^2=MN^2+NE^2-2MN\cdot NE\cos\angle MNE$，所以 $\frac{t^2}{4}+1=\frac{t^2}{4}+1+1-2\times\frac{1}{2}\sqrt{t^2+4}\times1\times\frac{\sqrt{2}}{4}$，解得 $t=2$，同理当 $\cos\angle MNE=-\frac{\sqrt{2}}{4}$ 时，无解. 设底面△ABC 的中心为 G，三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心为 O，连接 OG,AG，则 $OG\perp$ 平面 ABC，可得 $AG=\frac{2}{3}\sqrt{2^2-1}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$OG=\frac{1}{2}SA=1$，则三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的半径为 $R=OA=\sqrt{AG^2+OG^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$，所以三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=4\pi\times\left(\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2=\frac{28\pi}{3}$.



17. 解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d.

由 $\begin{cases}a_2+a_3=13,\\S_6=57,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2a_1+3d=13,\\6a_1+\frac{6\times5}{2}d=57,\end{cases}$ …… 2 分

解得 $\begin{cases}a_1=2,\\d=3,\end{cases}$ …… 4 分

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2+3(n-1)=3n-1$. …… 6 分

(2) $b_n=2^{a_n}=2^{3n-1}=\frac{8^n}{2}$， …… 7 分

所以 $T_n=\frac{4-\frac{8^n}{2}\times8}{1-8}=\frac{4(8^n-1)}{7}$， …… 9 分

因为 $T_n>10S_4$，所以 $\frac{4(8^n-1)}{7}>260$， …… 10 分

所以 $8^n>456$，因为 $n\in\mathbf{N}^*$，所以 $n\geqslant3$，

所以 $T_n>10S_4$ 成立的 n 的最小值为 3. …… 12 分

18. 解：(1)由频率和为 1，得 $0.06+0.08+b+a+0.24+0.32=1$， …… 2 分

又 $a=2b$，解得 $a=0.2$，$b=0.1$. …… 4 分

(2)由比例分配的分层随机抽样方法知，从平均每周课外阅读时间在 $(2,3]$ 内的学生中抽取 8 人，$(5,6]$ 内的学生中抽取 2 人， …… 6 分

从该 10 人中抽取 3 人，则 X 的可能取值为 1，2，3，

$P(X=1)=\frac{C_8^1C_2^2}{C_{10}^3}=\frac{1}{15}$，$P(X=2)=\frac{C_8^2C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$，$P(X=3)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$，

则 X 的分布列为：

X	1	2	3
P	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

…… 10 分

所以 X 的数学期望 $E(X)=1\times\frac{1}{15}+2\times\frac{7}{15}+3\times\frac{7}{15}=\frac{12}{5}$. …………………………………………………… 12 分

19. (1)证明:在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$CC_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$,$A_1B_1\subset$平面 $A_1B_1C_1$,$\therefore CC_1\perp A_1B_1$, … 1 分

$\because E$ 为 AB 的中点,且 $AC=BC$,$\therefore AB\perp CE$, …………………………………………………… 2 分

$\because AB/\!/A_1B_1$,$\therefore A_1B_1\perp CE$, …………………………………………………………………… 3 分

$\because CE\cap CC_1=C$,$CE,CC_1\subset$平面 CC_1E,

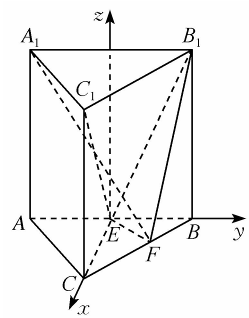
$\therefore A_1B_1\perp$平面 CC_1E, …………………………………………………………………………… 4 分

$\because C_1E\subset$平面 CC_1E,$\therefore A_1B_1\perp C_1E$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)解:$\because\angle ABC=60^\circ$,$AC=BC$,$\therefore\triangle ABC$ 为正三角形.

由(1)可得,$CE\perp$平面 ABB_1A_1,以 E 为原点,分别以$\overrightarrow{EC},\overrightarrow{EB},\overrightarrow{AA_1}$的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系 $E-xyz$,则 $E(0,0,0)$,$A_1(0,-\sqrt{3},2)$,$B_1(0,\sqrt{3},2)$,$F\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$,

$\therefore\overrightarrow{A_1B_1}=(0,2\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{B_1F}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},-2\right)$,$\overrightarrow{EF}=\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$. ………… 6 分



设平面 A_1B_1F 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{B_1F}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}2\sqrt{3}y=0,\\ x-\frac{\sqrt{3}}{3}y-2z=0,\end{cases}$

令 $z=1$,得 $y=0$,$x=2$,故平面 A_1B_1F 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$. ………… 8 分

设平面 B_1EF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{B_1F}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}a-\frac{\sqrt{3}}{3}b-2c=0,\\ a+\frac{2\sqrt{3}}{3}b=0,\end{cases}$

令 $b=\sqrt{3}$,得 $a=-2$,$c=-\frac{3}{2}$,故平面 B_1EF 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=\left(-2,\sqrt{3},-\frac{3}{2}\right)$.

……………………………………………………………………………………… 10 分

$\therefore\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{-\frac{11}{2}}{\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{37}}{2}}=-\frac{11}{\sqrt{185}}$,

设二面角 A_1-B_1F-E 的大小为 θ,则 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle}=\sqrt{1-\frac{121}{185}}=\frac{8\sqrt{185}}{185}$. ……………… 12 分

20. 解:(1)设 E 的方程为 $mx^2+ny^2=1$,过 $A(2,-1)$,$B\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$,

所以$\begin{cases}4m+n=1,\\ 2m+\frac{3}{2}n=1,\end{cases}$ …………………………………………………………………………… 2 分

解得 $m=\frac{1}{8}$,$n=\frac{1}{2}$, …………………………………………………………………………… 3 分

所以 E 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)当直线 l 的斜率不存在时,易得直线 l 的方程为 $x=\frac{2\sqrt{10}}{5}$ 或 $x=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

若直线 l 的方程为 $x=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,则 $M\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$,$N\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$或 $M\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$,$N\left(\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$,所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$,所以$\angle MON=\frac{\pi}{2}$;

若直线 l 的方程为 $x=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$,则 $M\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$,$N\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$或$M\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5},-\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$,$N\left(-\frac{2\sqrt{10}}{5},\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)$,所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$,所以$\angle MON=\frac{\pi}{2}$. ………………………………………………… 6 分

当直线 l 的斜率存在时,设直线 l 的方程为 $y=kx+m$,$M(x_1,y_1)$,$N(x_2,y_2)$,

因为直线 l 与圆 O:$x^2+y^2=\frac{8}{5}$ 相切,所以$\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$,即 $m^2=\frac{8}{5}(1+k^2)$. ……………………… 8 分

由$\begin{cases} y=kx+m, \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-8=0$,所以$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{1+4k^2}$,$x_1x_2=\dfrac{4m^2-8}{1+4k^2}$, ……… 9 分

所以$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=(1+k^2)\dfrac{4m^2-8}{1+4k^2}+km\left(-\dfrac{8km}{1+4k^2}\right)+m^2$

$=\dfrac{5m^2-8k^2-8}{1+4k^2}=\dfrac{5\times\dfrac{8}{5}(1+k^2)-8k^2-8}{1+4k^2}=0$,所以$\angle MON=\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………… 11 分

综上,$\angle MON$ 为定值,该定值为$\dfrac{\pi}{2}$. ……………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)若 $a=2$,则 $f(x)=e^{x-1}-2(x^2-1)-1=e^{x-1}-2x^2+1$,

所以 $f'(x)=e^{x-1}-4x$, ………………………………………………………………………………… 2 分

所以 $f'(1)=-3$,又 $f(1)=0$,

所以 $f(x)$在$x=1$处的切线方程为 $y=-3(x-1)$,即 $3x+y-3=0$. ……………………………… 4 分

(2)由题意知 $f'(x)=e^{x-1}-2ax$,令 $g(x)=f'(x)$,所以 $g'(x)=e^{x-1}-2a$,易得 $g'(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,又 $g'(1)=1-2a$.

当 $1-2a\geqslant 0$,即 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,$g'(x)\geqslant g'(1)\geqslant 0$,所以 $g(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,即 $f'(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以 $f'(x)\geqslant f'(1)=1-2a\geqslant 0$,所以 $f(x)$在$[1,+\infty)$上单调递增,所以 $f(x)\geqslant f(1)=0$,符合题意; …………………………………………………………………………………………… 8 分

当 $1-2a<0$,即 $a>\dfrac{1}{2}$时,令 $g'(x)=0$,解得 $x=1+\ln 2a$,所以当 $x\in[1,1+\ln 2a)$时,$g'(x)<0$,当 $x\in(1+\ln 2a,+\infty)$时,$g'(x)>0$,所以 $g(x)$在$[1,1+\ln 2a)$上单调递减,在$(1+\ln 2a,+\infty)$上单调递增,即 $f'(x)$在$[1,1+\ln 2a)$上单调递减,在$(1+\ln 2a,+\infty)$上单调递增,所以当 $x\in[1,1+\ln 2a)$时,$f'(x)\leqslant f'(1)=1-2a<0$,所以 $f(x)$在$[1,1+\ln 2a)$上单调递减,所以 $f(1+\ln 2a)<f(1)=0$,不符合题意. ……………………………………………………………………………………………… 11 分

综上,a 的取值范围是$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]$. ……………………………………………………………… 12 分

22. 解:(1)将$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$代入 l:$mx+y-2m=0$,得 $m\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-2m=0$,

所以直线 l 的极坐标方程为 $m\rho\cos\theta+\rho\sin\theta-2m=0$, ……………………………………… 2 分

由 $\rho=4(\sin\theta+\cos\theta)$,得 $\rho^2=4\rho(\sin\theta+\cos\theta)$,

又 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$,$\rho\cos\theta=x$,$\rho\sin\theta=y$,

所以 $x^2+y^2-4x-4y=0$,即$(x-2)^2+(y-2)^2=8$, ………………………………………………… 4 分

所以圆 C 的一个参数方程为$\begin{cases} x=2+2\sqrt{2}\cos\varphi, \\ y=2+2\sqrt{2}\sin\varphi \end{cases}$($\varphi$ 为参数). ……………………………… 5 分

(2)点 $C(2,2)$到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|2m+2-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}$, ……………………………… 7 分

则 $2\sqrt{8-\left(\dfrac{2}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2}=2\sqrt{6}$, ……………………………………………………………… 8 分

所以$\dfrac{4}{m^2+1}=2$,即 $m=\pm 1$. …………………………………………………………………… 10 分

23. 解:(1)$f(x)\geqslant 3$,即$|x^2-1|+|x-2|\geqslant 3$.

当 $x<-1$ 时,$x^2-x+1\geqslant 3$,解得 $x<-1$; ……………………………………………………… 1 分

当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,$3-x^2-x\geqslant 3$,解得$-1\leqslant x\leqslant 0$; …………………………………………… 2 分

当 $1<x<2$,$x^2-x+1\geqslant 3$,不等式无解; …………………………………………………………… 3 分

当 $x\geqslant 2$,$x^2+x-3\geqslant 3$,解得 $x\geqslant 2$. ……………………………………………………………… 4 分

故不等式 $f(x)\geqslant 3$ 的解集为$\{x\mid x\geqslant 2$ 或 $x\leqslant 0\}$. ………………………………………………… 5 分

(2)因为 $f(x)=|x^2-1|+|x-2|\geqslant|x^2-1+x-2|=|x^2+x-3|$,

当且仅当$(x^2-1)(x-2)\geqslant 0$ 时取等号, ……………………………………………………………… 6 分

所以 $f(a)\geqslant|a^2+a-3|$,当且仅当$(a^2-1)(a-2)\geqslant 0$ 时取等号,

又 $f(a)\leqslant|a^2+a-3|$,所以 $f(a)=|a^2+a-3|$,且$(a^2-1)(a-2)\geqslant 0$, …………………………… 8 分

解得 $a\geqslant 2$ 或$-1\leqslant a\leqslant 1$,即实数 a 的取值范围$[-1,1]\cup[2,+\infty)$. ……………………………… 10 分