

绵阳中学高 2023 届高三上学期 12 月阶段性考试

理科数学

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $P = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ，集合 $Q = \{x | -1 < x < 2\}$ ，则 $P \cap Q =$ ()

- A. $\{1\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据交集的定义计算。

【详解】由题意 $P \cap Q = \{0, 1\}$ ，

故选：B。

【点睛】本题考查集合的交集运算，掌握交集定义是解题关键，本题属于简单题。

2. 已知 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 < 0$ ， $q: \forall x \in \mathbf{R}, x+1 > 0$ ，则下列命题是真命题的是 ()

- A. $p \vee q$ B. $p \wedge q$
C. $\neg p \wedge q$ D. $\neg p \wedge \neg q$

【答案】D

【解析】

【分析】先判断命题 p, q 的真假，再判断复合命题的真假即可求解。

【详解】因为对 $\forall x \in \mathbf{R}$ ， $x^2 \geq 0$ 恒成立，所以命题 $p: \exists x \in \mathbf{R}, x^2 < 0$ 为假命题；

因为当 $x = -3$ 时， $x+1 = -2 < 0$ ，所以命题 $q: \forall x \in \mathbf{R}, x+1 > 0$ 为假命题，

则 $p \vee q$ ， $p \wedge q$ 均为假命题，因为 q 为假命题，所以 $\neg p \wedge q$ 为假命题，

因为 p, q 均为假命题，所以 $\neg p \wedge \neg q$ 为真命题，

故选：D。

3. 在发生某公共卫生事件期间，有专业机构认为该事件在一段时间没有发生在规模群体感染的标志为“连续 10 天，每天新增疑似病例不超过 7 人”。根据过去 10 天甲、乙、丙、丁四地新增疑似病例数据，一定符合该标志的是

- A. 甲地：总体均值为 3，中位数为 4 B. 乙地：总体均值为 1，总体方差大于 0
C. 丙地：中位数为 2，众数为 3 D. 丁地：总体均值为 2，总体方差为 3

【答案】D

【解析】

【详解】试题分析：由于甲地总体均值为3，中位数为4，即中间两个数（第5,6天）人数的平均数为4，因此后面的人数可以大于7，故甲地不符合.乙地中总体均值为1，因此这10天的感染人数总数为10，又由于方差大于0，故这10天中不可能每天都是1，可以有一天大于7，故乙地不符合，丙地中中位数为2，众数为3，3出现的最多，并且可以出现8，故丙地不符合，故丁地符合.

考点：众数、中位数、平均数、方差

4. 如图所示的图形来自中国古代的太极图，白色小圆和黑色小圆的圆心分别为 A , B . 过点 A 作与 AB 垂直的弦与大圆交于 C , D 两点，则 $\triangle BCD$ 的面积与圆的面积之比为 ()



A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$

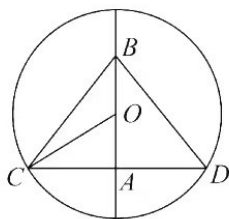
D. $\frac{2\sqrt{3}\pi}{9}$

【答案】C

【解析】

【分析】作出示意图，找到图中的几何关系，利用垂径定理求得线段长度间的关系，最后求出面积比例.

【详解】如图：做出示意图，易知 A, B, O 为圆 O 直径的4等分点，



设圆 O 半径为2， $\therefore OC = 2, OA = 1$.

而 $AB \perp CD$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle CAO$ 中， $AC = \sqrt{OC^2 - OA^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$,

$$\therefore CD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3},$$

$$\text{又 } S_{\text{圆}} = \pi r^2 = 4\pi,$$

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\text{圆}}} = \frac{2\sqrt{3}}{4\pi} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi},$$

故选: C.

5. 在下列条件中, 使 M 与 A, B, C 一定共面的是 ()

A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

C. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

【答案】B

【解析】

【分析】根据空间共面向量定理以及其结论一一判断各选项, 即可得答案.

【详解】对于 A 选项, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$, 由于 $1 - 2 - 1 = -2 \neq 1$, 所以不能得出 M, A, B, C 共面.

对于 B 选项, 由于 $\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}$, 则 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$ 为共面向量, 所以 M, A, B, C 共面.

对于 C 选项, $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, 由于 $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \neq 1$, 所以不能得出 M, A, B, C 共面.

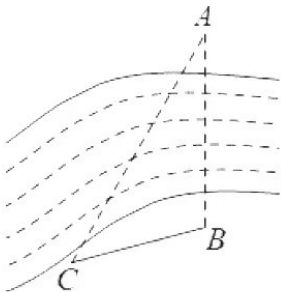
对于 D 选项, 由 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ 得 $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$,

而 $-1 - 1 - 1 = -3 \neq 1$, 所以不能得出 M, A, B, C 共面.

故选: B

6. 为了在一条河上建一座桥, 施工前在河两岸打上两个桥位桩 A, B (如图), 要测量 A, B 两点的距离,

测量人员在岸边定出基线 BC , 测得 $BC = 50\text{m}$, $\angle ABC = 105^\circ$, $\angle BCA = 45^\circ$, 就可以计算出 A, B 两点的距离为 ().



- A. 20 m B. 25 m C. 40 m D. $50\sqrt{2}$ m

【答案】D

【解析】

【分析】由三角形内角和定理求出 $\angle BAC$ ，再利用正弦定理即可求解

【详解】由三角形内角和定理可知： $\angle BAC = 180^\circ - \angle ACB - \angle ABC = 30^\circ$ ，

$$\text{由正弦定理得: } \frac{AB}{\sin \angle ACB} = \frac{BC}{\sin \angle BAC} \Rightarrow \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{50}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = 50\sqrt{2},$$

故选：D

7. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 F, G 分别是棱 AB, C_1D_1 的中点，则直线 FG 与平面 A_1ACC_1 所成角的正弦值等于()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{4}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

【答案】D

【解析】

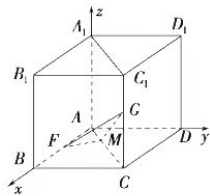
【分析】过 F 作 BD 的平行线交 AC 于 M ，则 $\angle MGF$ 即为直线 FG 与平面 A_1ACC_1 所成的角，易得 $FM \perp MG$ ，从而可得解.

【详解】方法一 过 F 作 BD 的平行线交 AC 于 M ，则 $\angle MGF$ 即为直线 FG 与平面 A_1ACC_1 所成的角.

设正方体棱长为 1，由 $FM \parallel BD$ ，所以 $FM \perp$ 面 A_1ACC_1 ，所以 $FM \perp MG$

$$\text{则 } MF = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad GF = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad \therefore \sin \angle MGF = \frac{FM}{MG} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

方法二 如图，分别以 AB, AD, AA_1 为 x 轴， y 轴， z 轴建立空间直角坐标系.



设正方体棱长为 1，则易知平面 A_1ACC_1 的一个法向量为 $n = (-1, 1, 0)$.

$$\therefore F(\frac{1}{2}, 0, 0), \quad G(1, 1, \frac{1}{2}), \quad \therefore \overrightarrow{FG} = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}).$$

设直线 FG 与平面 A_1ACC_1 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{FG} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{FG}|}{|\vec{n}| |\vec{FG}|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

答案: D

【点睛】本题考查直线与平面所成的角的求解, 考查学生的推理论证能力, 属中档题. 求线面角, 一是可以利用等体积计算出直线的端点到面的距离, 除以线段长度就是线面角的正弦值; 还可以建系, 用空间向量的方法求直线的方向向量和面的法向量, 再求线面角即可. 面面角一般是要么定义法, 做出二面角, 或者三垂线法做出二面角, 利用几何关系求出二面角, 要么建系来做.

8. 已知圆 $M: x^2 + y^2 - 6x = 0$, 过点 $(1, 2)$ 的直线 $l_1, l_2, \dots, l_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 被该圆 M 截得的弦长依次为 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列, 则 n 的最大值是 ()

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

【答案】D

【解析】

【分析】求出弦长的最小和最大值, 根据等差数列的关系即可求出 n 的最大值

【详解】解: 由题意

在圆 $M: x^2 + y^2 - 6x = 0$ 中

$$M: (x-3)^2 + y^2 = 9$$

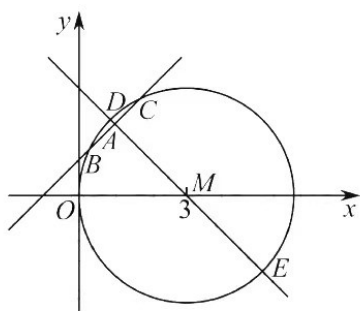
$\therefore$ 圆心 $M(3, 0)$, 半径为 3,

过点 $A(1, 2)$ 的直线 $l_1, l_2, \dots, l_n (n \in \mathbf{N}^*)$ 被该圆 M 截得的弦长依次为 $a_1, a_2, \dots, a_n$

过圆心作弦的垂线, 交圆于 D, E 两点, 如下图所示:

由几何知识得, 当 $MA \perp BC$ 时,

BC 为最短弦长; DE 为最长弦长, 为 6.



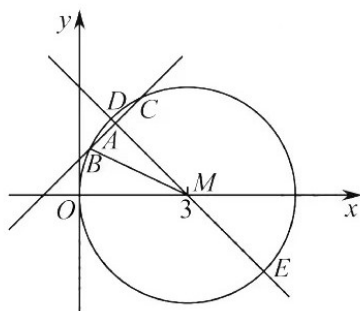
此时,

直线 DE 的解析式为: $y = -x + 3$

直线 BC 的解析式为: $y = x + 1$

圆心到弦 BC 所在直线的距离: $|AM| = \frac{|3 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$

连接 BM ,



由勾股定理得,

$$|AB| = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 1$$

$$\therefore |BC| = 2|AB| = 2,$$

$\therefore$ 最短弦长 $a_1 = 2$,

$\because a_1, a_2, \dots, a_n$ 是公差为 $\frac{1}{3}$ 的等差数列

$$\therefore \text{设 } a_n = 2 + \frac{1}{3}(n-1) = \frac{1}{3}n + \frac{5}{3}$$

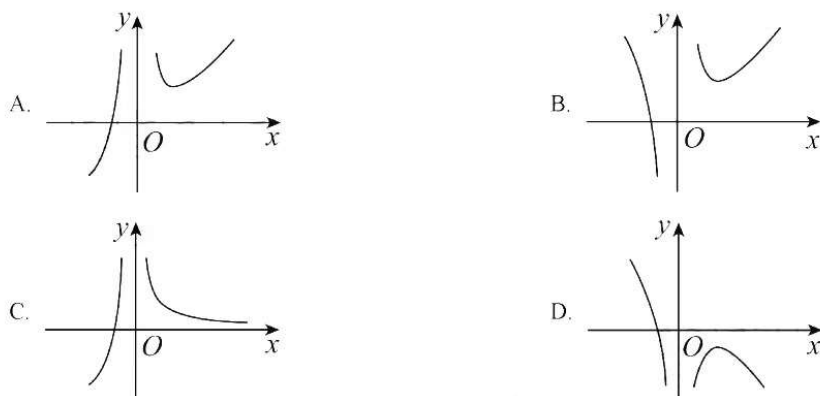
$\because$ 最长弦长为 6

$$\therefore a_n = \frac{1}{3}n + \frac{5}{3} = 6$$

解得: $n = 13$

故选: D.

9. 已知函数 $f(x) = 3x - \ln|x|$ ，则 $f(x)$ 的图象大致为 ()



【答案】A

【解析】

【分析】利用导数可求得 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上的单调性，由此可排除错误选项.

【详解】当 $x < 0$ 时， $f(x) = 3x - \ln(-x)$ ，则 $f'(x) = 3 - \frac{1}{x} > 0$ ，

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增，BD 错误；

当 $x > 0$ 时， $f(x) = 3x - \ln x$ ，则 $f'(x) = 3 - \frac{1}{x} = \frac{3x-1}{x}$ ，

$\therefore$ 当 $x \in (0, \frac{1}{3})$ 时， $f'(x) < 0$ ；当 $x \in (\frac{1}{3}, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ；

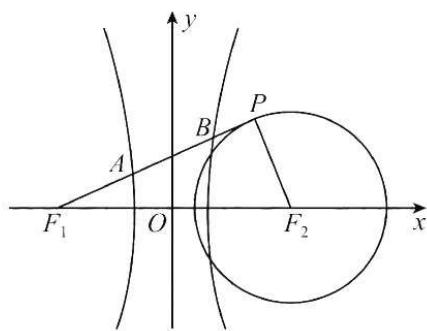
$\therefore f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{3})$ 上单调递减，在 $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 上单调递增，C 错误，A 正确.

故选：A.

10. 如图， $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ 分别为双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 作直线 l ，使直

线 l 与圆 $(x-c)^2 + y^2 = r^2$ 相切于点 P ，设直线 l 交双曲线 Γ 的左右两支分别于 A, B 两点 (A, B 位于线段 F_1P

上)，若 $|F_1A| : |AB| : |BP| = 2 : 2 : 1$ ，则双曲线 Γ 的离心率为 ()



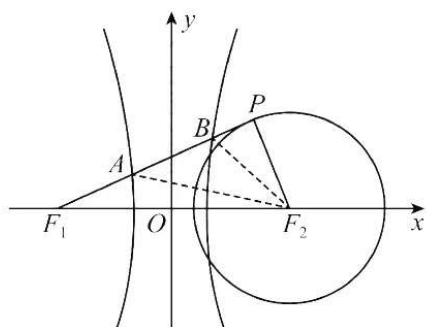
- A. 5 B. $\frac{\sqrt{265}}{5}$ C. $2\sqrt{6}+2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{6}+\sqrt{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】连接 AF_2 , BF_2 , 设 $|BP|=x$ 则 $|F_1A|=|AB|=2x$, 由题意可知 $|AF_2|=2a+2x$, $|BF_2|=4x-2a$,
即 $|PF_2|^2=(4x-2a)^2-x^2=(2a+2x)^2-(3x)^2=(2c)^2-(5x)^2$, 即 $x=\frac{6}{5}a$, 则 $\frac{53}{5}a^2=c^2$, 求解离心率即可.

【详解】连接 AF_2 , BF_2 , 设 $|BP|=x$ 则 $|F_1A|=|AB|=2x$, 即 $|PF_1|=5x$, $|PA|=3x$,



根据双曲线定义可知,

$$|BF_1|-|BF_2|=2a \text{ 即 } |BF_2|=|BF_1|-2a=4x-2a$$

$$|AF_2|-|F_1A|=2a \text{ 即 } |AF_2|=2a+|F_1A|=2a+2x$$

$\because$ 直线 l 与圆 $(x-c)^2+y^2=r^2$ 相切于点 P

$$\therefore PF_2 \perp PF_1$$

$$\text{在 } Rt\triangle F_1PF_2 \text{ 中 } |PF_2|^2=|F_1F_2|^2-|PF_1|^2=(2c)^2-(5x)^2=4c^2-25x^2 \text{ ①}$$

在 $Rt\triangle APF_2$ 中 $|PF_2|^2 = |AF_2|^2 - |PA|^2 = (2a+2x)^2 - (3x)^2 = 4a^2 - 5x^2 + 8ax$ ②

在 $Rt\triangle BPF_2$ 中 $|PF_2|^2 = |BF_2|^2 - |PB|^2 = (4x-2a)^2 - (x)^2 = 15x^2 + 4a^2 - 16ax$ ③

②③联立得 $4a^2 - 5x^2 + 8ax = 15x^2 + 4a^2 - 16ax$, 即 $x = \frac{6}{5}a$

①②联立得 $4c^2 - 25x^2 = 4a^2 - 5x^2 + 8ax$ 即 $4c^2 = 4a^2 + 20x^2 + 8ax$ ④

将 $x = \frac{6}{5}a$ 代入④, 即 $4c^2 = 4a^2 + 20\left(\frac{6}{5}a\right)^2 + 8a\left(\frac{6}{5}a\right)$,

整理得 $c^2 = \frac{53}{5}a^2$ 即 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{53}{5}} = \frac{\sqrt{265}}{5}$

故选: B

【点睛】本题考查双曲线的离心率, 解决本题的关键是根据双曲线的定义表示出 $|AF_2|$ 与 $|BF_2|$, 本题属于中档题.

11. 已知 $a > 1$, x_1, x_2, x_3 为函数 $f(x) = a^x - x^2$ 的零点, $x_1 < x_2 < x_3$, 若 $x_1 + x_3 = 2x_2$, 则 ()

A. $\frac{x_3}{x_2} < 2\ln a$

B. $\frac{x_3}{x_2} = 2\ln a$

C. $\frac{x_3}{x_2} > 2\ln a$

D. $\frac{x_3}{x_2}$ 与 $2\ln a$ 大小关系不确定

【答案】C

【解析】

【分析】 x_1, x_2, x_3 为函数 $f(x) = a^x - x^2$ 的零点, 则可以将三个根代入方程得到三个方程, 再将这三个方程

进行运算凑出 $x_1 + x_3 = 2x_2$, 可解出 $\frac{x_3}{x_2}$ 为定值, 然后再根据函数有三个零点求出 $2\ln a$ 的范围可得答案.

【详解】易知 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, x_1, x_2, x_3 为函数 $f(x) = a^x - x^2$ 的零点,

$$\therefore \begin{cases} a^{x_1} = x_1^2 \\ a^{x_2} = x_2^2, \therefore a^{x_1+x_3} = (x_1x_3)^2, a^{2x_2} = x_2^4, \therefore x_2^4 = (x_1x_3)^2, \\ a^{x_3} = x_3^2 \end{cases}$$

$$\therefore x_2^2 + x_1x_3 = 0, \text{ 又 } x_1 + x_3 = 2x_2, \therefore x_2^2 + (2x_2 - x_3)x_3 = 0, \therefore \left(\frac{x_3}{x_2}\right)^2 - 2\left(\frac{x_3}{x_2}\right) - 1 = 0$$

解之: $\frac{x_3}{x_2} = \sqrt{2} + 1$, 负根舍去;

又 $f(x) = a^x - x^2 = 0, \therefore a^x = x^2, \therefore x \ln a = \ln x^2$,

即 $y = x \ln a$ 与 $y = \ln x^2$ 有三个交点, 交点横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 , 如下图先计算过原点的切线方程, 不妨

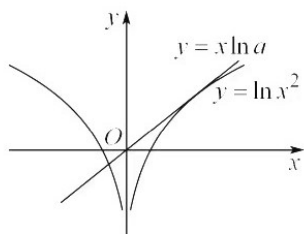
设切点为 $(t, 2 \ln t), y' = (2 \ln x)' = \frac{2}{x}, \therefore k = \frac{2}{t}$,

切线方程为: $y - 2 \ln t = \frac{2}{t}(x - t)$ 过原点, $\therefore t = e$

此时 $k = \frac{2}{t} = \frac{2}{e}, \therefore y = x \ln a$ 的斜率比切线斜率小, 结合图像容易分析出,

$\therefore \ln a < \frac{2}{e}, \therefore 2 \ln a < \frac{4}{e} < 2 < \sqrt{2} + 1$.

故选: C



【点睛】函数零点的求解与判断方法:

(1)直接求零点: 令 $f(x) = 0$, 如果能求出解, 则有几个解就有几个零点.

(2)零点存在性定理: 利用定理不仅要函数在区间 $[a, b]$ 上是连续不断的曲线, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 还必须结合函数的图象与性质(如单调性、奇偶性)才能确定函数有多少个零点.

(3)利用图象交点的个数: 将函数变形为两个函数的差, 画两个函数的图象, 看其交点的横坐标有几个不同的值, 就有几个不同的零点.

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x + 2}{2} & (x \leq 1) \\ |\ln(x-1)| & (x > 1) \end{cases}$, 若 $F(x) = f^2(x) - af(x) + \frac{2}{3}$ 的零点个数为 4, 则实数 a 取值范

围为 ()

A. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right] \cup \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$

B. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{7}{3}\right)$

C. $\left[\frac{5}{3}, 2\right)$

D. $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{5}{3}\right) \cup (2, +\infty)$

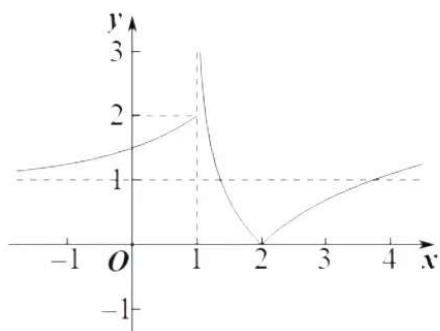
【答案】A

【解析】

【分析】

设 $t = f(x)$ ，做出 $f(x)$ 函数图像，分析 $t = f(x)$ 的实根情况，方程 $t^2 - at + \frac{2}{3} = 0 (t \neq 0)$ 有两个不等实数根 t_1, t_2 ，且满足 $t_1, t_2 \in (0, 1]$ ，或 $t_1, t_2 > 2$ ，或 $0 < t_1 < 1, t_2 > 2$ ；然后讨论计算得出结果即可。

【详解】解：根据函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x + 2}{2} (x \leq 1) \\ |\ln(x-1)|, (x > 1) \end{cases}$ ，做出其图像如下：



设 $t = f(x)$ ，根据函数图像有：

当 $t > 2$ 时，方程 $t = f(x)$ 有 2 个实数根；

当 $1 < t \leq 2$ 时，方程 $t = f(x)$ 有 3 个实数根；

当 $0 < t < 1$ 时，方程 $t = f(x)$ 有 2 个实数根；

当 $t = 0$ 时，方程 $t = f(x)$ 有 1 个实数根；

当 $t < 0$ 时，方程 $t = f(x)$ 没有实数根；

当若 $F(x) = f^2(x) - af(x) + \frac{2}{3}$ 的零点个数为 4 个时，

方程 $t^2 - at + \frac{2}{3} = 0 (t \neq 0)$ 有两个不等实数根 t_1, t_2 ，

且满足 $t_1, t_2 \in (0, 1]$ ，或 $t_1, t_2 > 2$ ，或 $0 < t_1 < 1, t_2 > 2$ ；

设函数 $h(t) = t^2 - at + \frac{2}{3}$ ；

$$\text{则} \begin{cases} h(0) > 0 \\ \Delta > 0 \\ 0 < \frac{a}{2} < 1 \\ h(1) \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} \Delta > 0 \\ h(2) > 0, \\ \frac{a}{2} > 0 \end{cases}, \begin{cases} h(0) > 0 \\ h(1) < 0, \\ h(2) < 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } \frac{2\sqrt{6}}{3} < a \leq \frac{5}{3}, \text{ 或 } a > \frac{7}{3},$$

故选: A.

【点睛】本题考查复合函数的零点问题, 二次方程根的分布问题, 数形结合思想的应用, 属于较难题型;

解题方法就是先令 $t = f(x)$, 再根据 $f(x)$ 的图像得出不同 t 取值时, $t = f(x)$ 的实根个数, 然后构造方程

$$t^2 - at + \frac{2}{3} = 0 (t \neq 0), \text{ 求出当函数有四个零点时的 } t \text{ 的组合, 再构造方程求解即可; 解题的关键点是数形}$$

结合求出 $t = f(x)$ 在 t 取不同值时的实根个数.

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 小小的火柴棒可以拼成几何图形, 也可以拼成数字. 如下图所示, 我们可以用火柴棒拼出 1 至 9 这 9 个数字比如: “1”需要 2 根火柴棒, “7”需要 3 根火柴棒. 若用 8 根火柴棒以适当的方式全部放入右面的表格中

--	--	--

 (没有放入火柴棒的空位表示数字“0”), 那么最多可以表示无重复数字的三位数有_____个



【答案】20

【解析】

【分析】根据表示数字的火柴棒的根数分类讨论, 结合排列组合即可求解.

【详解】由题意可得, 用 2 根火柴棒表示数字 1, 3 根火柴棒表示数字 7, 4 根火柴棒表示数字 4, 5 根火柴棒表示数字 2, 3 或 5, 6 根火柴棒表示数字 6 或 9, 7 根火柴棒表示数字 8,

数字不重复, 因此 8 根火柴棒只能分成两类: 2 和 6, 3 和 5, 组成两个数字, 还有数字只能为 0,

这样组成的无重复数字的三位数个数为: $C_2^1 C_3^1 A_2^2 + C_2^1 C_3^1 A_2^2 = 20$.

故答案为: 20

$$14. \text{ 若实数 } a, b \text{ 满足 } \begin{cases} a+b-2 \geq 0 \\ b-a-1 \leq 0 \\ a \leq 1 \end{cases}, \text{ 则 } \frac{b^2-3ab}{a^2} \text{ 的取值范围是 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【答案】 $[-\frac{9}{4}, 0]$

【解析】

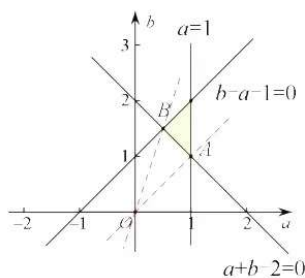
【分析】

$\frac{b^2-3ab}{a^2}$ 可化为 $(\frac{b}{a})^2 - 3(\frac{b}{a})$ ，令 $k = \frac{b}{a}$ ，只需求出 k 的范围，作出不等式组所表示的平面区域，利用

$k = \frac{b}{a} = \frac{b-0}{a-0}$ 的几何意义，即可求出 k 的范围，进而可求出 $\frac{b^2-3ab}{a^2}$ 的取值范围。

【详解】 $\frac{b^2-3ab}{a^2} = (\frac{b}{a})^2 - 3(\frac{b}{a})$ ，令 $k = \frac{b}{a}$ ，则 $\frac{b^2-3ab}{a^2} = k^2 - 3k$ ，

作出原不等式组所表示的平面区域，如图所示，



易知当目标函数 $k = \frac{b}{a}$ ，过点 $A(1,1)$ 时， k 取得最小值 1；

当过点 $B(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 时， k 取得最大值 3，故 $1 \leq k \leq 3$ ，

所以 $\frac{b^2-3ab}{a^2} = k^2 - 3k = (k - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} \in [-\frac{9}{4}, 0]$ ，

所以 $\frac{b^2-3ab}{a^2}$ 的取值范围是 $[-\frac{9}{4}, 0]$ 。

故答案为： $[-\frac{9}{4}, 0]$

【点睛】 本题主要考查线性规划知识的应用，关键是将 $\frac{b^2-3ab}{a^2}$ 可化为 $(\frac{b}{a})^2 - 3(\frac{b}{a})$ ，利用数形结合求出 $\frac{b}{a}$ 的范围。

15. 如图所示，墙上挂有边长为 a 的正方形木板，它的四个角的阴影部分都是以正方形的顶点为圆心，半径为 $\frac{a}{2}$ 的圆弧。某人向此板投镖，假设每次都能击中木板，且击中木板上每个点的可能性都相等，此人投镖 4000 次，镖击中空白部分的次数是 854 次。据此估算：圆周率 π 约为__。



【答案】3.146

【解析】

【分析】先求出击中空白部分的概率对应的平面区域的面积，再根据几何概型概率公式易求解。

【详解】解：图中空白部分的面积为： $a^2 - \pi \times (\frac{a}{2})^2 = (1 - \frac{\pi}{4})a^2$ ，

则他击中空白部分的概率是 $1 - \frac{\pi}{4}$ ，

$\therefore$ 投镖 4000 次，镖击中空白部分的次数是 854 次，

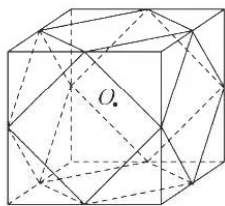
$$\therefore 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{854}{4000},$$

$$\therefore \pi \approx 3.146.$$

故答案为：3.146.

【点睛】本题主要考查了几何图形的面积、几何概型，几何概型的概率估算公式中的“几何度量”，可以为线段长度、面积、体积等，而且这个“几何度量”只与“大小”有关，而与形状和位置无关。

16. 如图为某公园供游人休息的石凳，它可以看做是一个正方体截去八个一样的四面体得到的，它的表面是由正三角形和正方形组成，设被截正方体的棱长为 $2a$ ，若球 O 以该几何体的中心为球心，且与正三角形表面相切，则该球被其中一个正方形表面截得的截面面积为_____.



【答案】 $\frac{\pi}{3}a^2$

【解析】

【分析】由题意，建立空间直角坐标系，根据球的性质，求得半径，利用勾股定理，结合圆的面积计算公式，可得答案。

【详解】如图建系， $O(a, a, a)$ ， $A(2a, a, 2a)$ ， $B(a, 0, 2a)$ ， $M(2a, 0, a)$ ，



四面体 $OABM$ 为正四面体, O 到平面 ABM 距离 $R = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \sqrt{2}a = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$,

球被正方体 $ABCD$ 截得的圆为圆 O_1 , $r = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $S = \frac{1}{3}a^2\pi$.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=4$, $4a_n=3a_{n+1}+a_{n-1}$ ($n \geq 3$).

(2) 设 $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_n = \frac{1}{n(5-a_{n-1})(5-a_n)} (n > 2)$, 求证: $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i} > 3$.

【答案】(1) $a_n = \begin{cases} 1, n=1 \\ 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}, n \geq 2 \end{cases}$

【解析】

【分析】(1) 通过递推公式求出 $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}$ 的值, 求出 a_{n+1} 与 a_n 的差, 进而求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 求出数列 $\{b_n\}$ 的通项公式, 通过放缩法即可证明.

由题意

在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 4$, $4a_n = 3a_{n+1} + a_{n-1}$ ($n \geq 3$)

$$\therefore \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n - a_{n-1}} = \frac{1}{3}, \quad a_2 - a_1 = 1, \quad a_3 - a_2 = 2$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}, \quad n \geq 2$$

$$\therefore a_n - a_1 = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) = 1 + 2 + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{3^{n-3}} = 1 + \frac{2\left(1 - \frac{1}{3^{n-2}}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = 4 - \frac{1}{3^{n-3}}$$

$$\therefore a_n = 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}, \quad n \geq 2$$

$$\because 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-3} = -4 \neq a_1$$

$$\therefore a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}, & n \geq 2 \end{cases}$$

【小问 2 详解】

由题意及 (1) 证明如下,

在数列 $\{a_n\}$ 中,

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 5 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}, & n \geq 2 \end{cases}$$

在数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_n = \frac{1}{n(5-a_{n+1})(5-a_n)}$ ($n \geq 2$)

$$\therefore b_n = \frac{1}{n \left[5 - \left(5 - \frac{1}{3^{n+1-3}}\right) \right] \left[5 - \left(5 - \frac{1}{3^{n-3}}\right) \right]} = \frac{1}{n \left(\frac{1}{3^{n-2}} \right) \left(\frac{1}{3^{n-3}} \right)}, \quad n \geq 2$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{i} = \frac{b_1}{1} + \frac{b_2}{2} + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{b_i}{i} = 2 + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i^2 \left(\frac{1}{3^{i-2}} \right) \left(\frac{1}{3^{i-3}} \right)} \geq 2 + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{1}{i^2 \left(\frac{1}{3^{3-2}} \right) \left(\frac{1}{3^{3-3}} \right)}$$

$$= 2 + \sum_{i=3}^{\infty} \frac{3}{i^2} = 2 + 3 \times \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right) > 2 + 3 \times \left(\frac{1}{3^2} \times 3 \right) = 2 + 3 \times \left(\frac{1}{3} \right) = 3$$

18. 某公司生产一种消毒液, 为测试消杀效果, 测试车间用该消毒液对 8 个染菌不锈钢载片进行测试: 第一轮测试, 逐一对着 8 个载片进行消杀检测, 若检测出不超过 1 个载片没有消杀效果, 则该消毒液合格, 测试结束; 否则, 10 分钟后对没有产生消杀效果的载片进行第二轮测试, 如果第二轮被测试的载片都产生消杀效果, 则消毒液合格, 否则需要对该消毒成分进行改良. 假设每个染菌载片是否产生消杀效果相互独立, 每次消杀检测互不影响, 且每次消杀检测每一个染菌片产生效果的概率为 p ($0 < p < 1$).

(1) 求经过第一轮测试该消毒液即合格的概率;

(2) 每进行一次载片测试视为一次检测, 设检测次数 ξ 的数学期望为 $E(\xi)$, 求证: $8 < E(\xi) < 16 - 8p$.

【答案】(1) $p^7(8-7p)$

(2) 见解析.

【解析】

【分析】(1) 由题意可得经过第一轮测试该消毒液即合格有两种情况: 8 个载片均有效果, 或 7 个载片均有效果. 利用二项分布的概率计算公式即可得出结论.

(2) 第一轮测试, 逐一对这 8 个载片进行消杀检测, 共检测 8 次, 第一轮未产生效果的有 $8-8p$ 个载片.

因此第二轮检测的次数为 $8-8p$, 进而证明结论.

【小问 1 详解】

由题意可得经过第一轮测试该消毒液即合格有两种情况:

8 个载片均有效果, 或 7 个载片均有效果.

所以经过第一轮测试该消毒液即合格的概率为:

$$= p^8 + C_8^7 p^7 (1-p) = p^7 (8-7p).$$

【小问 2 详解】

证明: 第一轮测试, 逐一对这 8 个载片进行消杀检测,

共检测 8 次, 则 $E(\xi) > 8$,

因为每次消杀检测每一个染菌片产生效果的概率为 p ($0 < p < 1$),

所以第一轮未产生效果的有 $8-8p$ 个载片.

因此第二轮检测的次数为 $8-8p$,

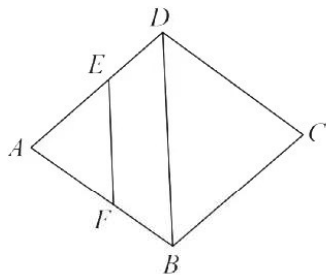
所以 $E(\xi) = 8 + 8 - 8p = 16 - 8p$ ，即为最多次数。

所以 $8 < E\xi < 16 - 8p$ ($0 < p < 1$)。

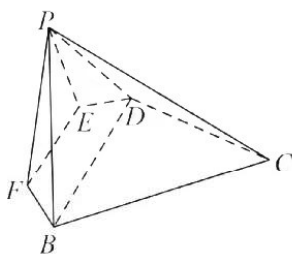
19. 如图(1)，菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ，动点 E, F 分别在边 AD, AB 上（不含端点），且

$\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{DB}$ ($0 < \lambda < 1$)，沿 EF 将 $\triangle AEF$ 向上折起得到 $\triangle PEF$ ，使得平面 $PEF \perp$ 平面 $BCDEF$ ，如图

(2) 所示。



图(1)



图(2)

(1) 当 λ 为何值时， $BF \perp PD$ ；

(2) 若直线 PC 与平面 $BCDEF$ 所成角的正切值为 $\frac{1}{3}$ ，求平面 PEF 和平面 PBD 夹角的大小。

【答案】(1) $\lambda = \frac{2}{3}$

(2) 45° 。

【解析】

【分析】(1) 证明 $BF \perp OD$ ，延长 DO 交 AB 于点 N ，确定 O 为 $\triangle ABD$ 的重心，计算得到答案。

(2) 建立空间直角坐标系，计算各点坐标，根据线面夹角得到 $\lambda = \frac{1}{2}$ ，再计算两个平面的法向量，根据向量的夹角公式计算得到答案。

【小问1详解】

菱形 $ABCD$ 中， $\angle ABC = 120^\circ$ ，故 $\angle A = 60^\circ$ ， $AB = AD$ ， $\triangle ABD$ 是等边三角形，

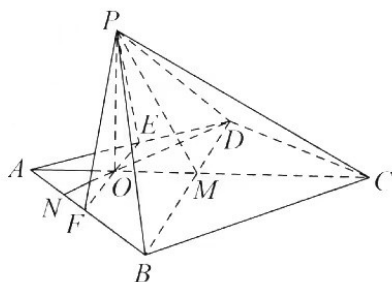
又 $\overrightarrow{EF} = \lambda \overrightarrow{DB}$ ，故 $EF \parallel BD$ ，故 $\triangle PEF$ 也是等边三角形，

取 EF 的中点 O ，连接 DO ，则 $PO \perp EF$ ，平面 $PEF \perp$ 平面 $BCDEF$ ， $PO \subset$ 平面 PEF ，

平面 $PEF \cap$ 平面 $BCDEF = EF$ ，故 $PO \perp$ 平面 $BCDEF$ ， $BF \subset$ 平面 $BCDEF$ ，

故 $PO \perp BF$ ，由 $BF \perp PD$ ，而 $DO \cap PO$ ，故 $BF \perp$ 平面 POD ， $OD \subset$ 平面 POD ，

故 $BF \perp OD$ ，



延长 DO 交 AB 于点 N , 则 $DN \perp AB$, $AO \perp BD$, 故 O 为 $\triangle ABD$ 的重心,

又 O 点在 EF 上, $EF \parallel BD$, 故 $\overrightarrow{EF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$, 即 $\lambda = \frac{2}{3}$.

【小问 2 详解】

以 O 为坐标原点, 以 OF, OC, OP 为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系 (如图所示),

设菱形 $ABCD$ 边长为 2, 则 $P(0, 0, \sqrt{3}\lambda)$, $F(\lambda, 0, 0)$, $E(-\lambda, 0, 0)$, $B(1, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 0)$

$C(0, 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 0)$, $D(-1, \sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda, 0)$,

$PO \perp$ 平面 $BDEF$, $\angle PCO$ 即为 PC 与平面 $BCDEF$ 所成的角,

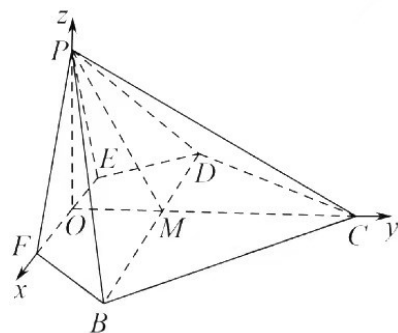
$$\tan \angle PCO = \frac{|PO|}{|OC|} = \frac{\sqrt{3}\lambda}{2\sqrt{3} - \sqrt{3}\lambda} = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } \lambda = \frac{1}{2},$$

$OC \perp$ 平面 PEF , 故 $\overrightarrow{OC} = \left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ 即为平面 PEC 的法向量.

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0, \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x = 0 \\ x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \end{cases}$,

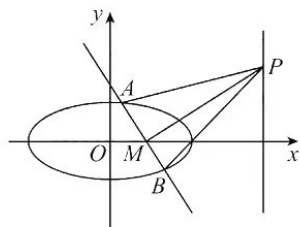
取 $\vec{n} = (0, 1, 1)$, 则 $\cos \langle \overrightarrow{OC}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{OC}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\langle \overrightarrow{OC}, \vec{n} \rangle = 45^\circ$,

平面 PEF 与平面 PBD 的夹角为 45° .



20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 $(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, P 是

直线 $x=4$ 上任一点, 过点 $M(1, 0)$ 且与 PM 垂直的直线交椭圆于 A, B 两点.



(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 PA, PM, PB 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 问: 是否存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_3 = \lambda k_2$? 若存在, 求出 λ 的值; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

(2) 存在, $\lambda = 2$

【解析】

【分析】(1) 根据右顶点和离心率求出 a 和 c , 进而求出 b , 即可得到椭圆的方程.

(2) 假设存在, 然后对直线 AB 斜率是否存在进行分类讨论, 将直线 AB 方程与椭圆方程联立, 利用韦达定理, 代入 $k_1 + k_3 = \lambda k_2$, 即可求出 λ 的值.

【小问 1 详解】

由题意

在椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中,

右顶点为 $(2, 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore a = 2, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore c = \sqrt{3}$$

$$\therefore b^2 = a^2 - c^2 = 1$$

∴ 椭圆的方程为: $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

【小问 2 详解】

由题意及 (1) 得

在椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 中,

设存在常数 λ , 使得 $k_1 + k_3 = \lambda k_2$

当直线 AB 斜率不存在时,

其方程为: $x = 1$,

代入椭圆方程得 $A\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

此时 $P(4, 0)$,

可得 $k_1 + k_3 = 0 = k_2$

当直线 AB 斜率存在时,

设直线 AB 的方程为 $y = k(x - 1)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

将直线方程代入椭圆方程得:

$$(1 + 4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1 + 4k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{4k^2 - 4}{1 + 4k^2}$$

∵ P 是直线 $x = 4$ 上任一点, 过点 $M(1, 0)$ 且与 PM 垂直的直线交椭圆于 A, B 两点

$$\therefore \text{直线 } PM \text{ 的方程为: } y = -\frac{1}{k}(x - 1)$$

$$\therefore P\left(4, -\frac{3}{k}\right)$$

$$\text{由几何知识得: } k_2 = -\frac{1}{k}, \quad k_1 = \frac{y_1 + \frac{3}{k}}{x_1 - 4}, \quad k_3 = \frac{y_2 + \frac{3}{k}}{x_2 - 4}$$

$$\therefore k_1 + k_3 = \lambda k_2$$

$$\therefore \frac{y_1 + \frac{3}{k}}{x_1 - 4} + \frac{y_2 + \frac{3}{k}}{x_2 - 4} = \lambda \left(-\frac{1}{k} \right)$$

将 $x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}$, $x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 4}{1+4k^2}$, $y_1 = k(x_1 - 1)$, $y_2 = k(x_2 - 1)$ 代入方程, 并化简得:

$$-\frac{2}{k} = -\frac{\lambda}{k}$$

解得: $\lambda = 2$

综上, 存在常数 $\lambda = 2$, 使得 $k_1 + k_3 = \lambda k_2$

21. 已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x - 2a\sqrt{x}$ 有两个极值点 x_1, x_2 .

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $x_2 \geq e^2 x_1$, 求 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ 的最大值.

【答案】(1) $(2, +\infty)$

(2) $\frac{e}{e^2 - 1} - \frac{1}{2}$

【解析】

【分析】(1) 求导得 $f'(x) = \frac{x - 2a\sqrt{x} + 2a}{2x}$, $f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 等价于 $f'(x) = 0$ 有两个解, 结合

一元二次函数性质即可求解 a 的取值范围;

(2) 由 (1) 的韦达定理得 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = 2a$, $f(x_2) - f(x_1)$ 化简代换 a 得

$$\frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2} \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{2}(x_2 - x_1), \text{ 变形整理得 } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\ln \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}} - \frac{1}{2}, \text{ 令 } m = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \geq e, \text{ 构造}$$

$$h(m) = \frac{\ln m}{m - \frac{1}{m}}, \text{ 利用导数研究 } h(m) \text{ 的单调性, 求出 } h(m)_{\max}, \text{ 进而得解.}$$

【小问 1 详解】

由 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{2}x - 2a\sqrt{x}$ 得 $x > 0$, $f'(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{2} - \frac{a}{\sqrt{x}} = \frac{x - 2a\sqrt{x} + 2a}{2x}$, 因为 $f(x)$ 有两个极值点

x_1, x_2 , 所以 $f'(x) = 0$ 有两个解, 令 $t = \sqrt{x} (t > 0)$, 则 $t^2 - 2at + 2a = 0$ 有两个不同的正根, 即

$$\begin{cases} \Delta = 4a^2 - 8a > 0 \\ a > 0 \\ f(0) = 2a > 0 \end{cases}, \text{解得 } a > 2, \text{ 所以 } a \in (2, +\infty);$$

【小问 2 详解】

由 (1) 根据韦达定理得 $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{x_1} \cdot \sqrt{x_2} = 2a$, 所以

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= a \ln x_2 + \frac{1}{2}x_2 - 2a\sqrt{x_2} - \left(a \ln x_1 + \frac{1}{2}x_1 - 2a\sqrt{x_1} \right) \\ &= a \ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) - 2a(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \\ &= \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2} \ln \frac{x_2}{x_1} + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) - (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}) \\ &= \frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2} \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{2}(x_2 - x_1), \text{ 所以 } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{\sqrt{x_1 x_2}}{2} \ln \frac{x_2}{x_1} - \frac{1}{2}(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x_1 x_2} \ln \frac{x_2}{x_1}}{x_2 - x_1} - \frac{1}{2} = \frac{\ln \sqrt{\frac{x_2}{x_1}}}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} - \sqrt{\frac{x_1}{x_2}}} - \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

因为 $x_2 \geq e^2 x_1$, 所以 $\frac{x_2}{x_1} \geq e^2$, 令 $m = \sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \geq e$, 设 $h(m) = \frac{\ln m}{m - \frac{1}{m}} = \frac{m \ln m}{m^2 - 1} (m \geq e)$,

$$\text{则 } h'(m) = \frac{(\ln m + 1)(m^2 - 1) - 2m^2 \ln m}{(m^2 - 1)^2} = \frac{(m^2 - 1) - (m^2 + 1) \ln m}{(m^2 - 1)^2},$$

因为 $1 < m^2 - 1 < m^2 + 1, \ln m > 1$, 所以 $(m^2 - 1) < (m^2 + 1) \ln m$, 所以 $h'(m) < 0$, 所以 $h(m)$ 在 $(e, +\infty)$ 单调减,

$$h(m)_{\max} = h(e) = \frac{e \ln e}{e^2 - 1} = \frac{e}{e^2 - 1}, \text{ 所以 } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ 的最大值为 } \frac{e}{e^2 - 1} - \frac{1}{2}.$$

【点睛】关键点睛: 利用导数求解函数最值问题可难可简单, 本题由韦达定理代换参数 a 是解题关键, 构造函数法求解极值是常用方法, 应善于积累此类题型, 进行专项训练.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

[选修 4—4: 坐标系与参数方程] (10 分)

22. 在平面直角坐标系中, 已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = 1 + \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以原点为极点, x 轴的正

半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$.

(1) 写出直线 l 的直角坐标方程以及曲线 C 的极坐标方程;

(2) 若 $P(0, -1)$, 且直线 l 与曲线 C 交于 M, N 两点, 求 $\frac{|PM|^2 + |PN|^2}{(|PM| \cdot |PN|)^2}$ 的值.

【答案】(1) 直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$, 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta + 1 = 0$;

(2) $\frac{4\sqrt{3}+5}{16}$.

【解析】

【分析】(1) 根据平方关系消去参数可得曲线 C 的普通方程, 再根据极坐标与直角坐标互化公式即可解出;

(2) 依题可得直线 l 的参数方程标准形式, 再与曲线 C 的普通方程联立, 然后根据参数 t 的几何意义即可解出.

【详解】(1) 因为直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{6}) = 1$, 即 $\sqrt{3}\rho \cos \theta - \rho \sin \theta - 1 = 0$, 所以直线 l 的直角坐标方程为 $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$;

由题可得, 曲线 $C: (x-1)^2 + (y-1)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, 即 $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$,

故曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 2\rho \cos \theta - 2\rho \sin \theta + 1 = 0$.

(2) 易知点 $P(0, -1)$ 在直线 l 上, 设直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数),

代入 $C: x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ 中, 整理得 $t^2 - (2\sqrt{3}+1)t + 4 = 0$,

由根与系数的关系得 $t_1 + t_2 = 2\sqrt{3}+1, t_1 \cdot t_2 = 4$,

故 $\frac{|PM|^2 + |PN|^2}{(|PM| \cdot |PN|)^2} = \frac{t_1^2 + t_2^2}{t_1^2 \cdot t_2^2} = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2}{(t_1 t_2)^2} = \frac{4\sqrt{3}+5}{16}$.

[选修 4—5: 不等式选讲] (10 分)

23. 已知函数 $f(x) = |x| + |x-2|$.

(1) 求关于 x 的不等式 $f(x) < 3$ 的解集;

(2) 如果关于 x 的不等式 $f(x) < a$ 的解集不是空集, 求实数 a 的取值范围.

【答案】(1) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

(2) $(2, +\infty)$

【解析】

【分析】(1) 去绝对值, 将函数化成分段函数的形式, 即可求出 $f(x) < 3$ 的解集.

(2) 求出函数 $f(x) = |x| + |x-2|$ 的取值范围, 因关于 x 的不等式 $f(x) < a$ 的解集不是空集, 故实数 a 需要大于函数的最小值, 即可求出实数 a 的取值范围.

【小问 1 详解】

由题意

在 $f(x) = |x| + |x-2|$ 中,

当 $x < 0$ 时, $f(x) = -x - (x-2) = -2x+2$

当 $0 \leq x < 2$ 时, $f(x) = x - (x-2) = 2$

当 $x \geq 2$ 时, $f(x) = x + (x-2) = 2x-2$

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \\ 2x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$\therefore$ 当 $f(x) < 3$ 时, 解得: $-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}$

$\therefore x$ 的不等式 $f(x) < 3$ 的解集为 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

【小问 2 详解】

由题意及 (1) 得

在 $f(x) = |x| + |x-2|$ 中,

$$f(x) = \begin{cases} -2x+2, & x < 0 \\ 2, & 0 \leq x < 2 \\ 2x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$

$\therefore f(x) \geq 2$

∵关于 x 的不等式 $f(x) < a$ 的解集不是空集,

$$\therefore a > f(x)_{\min} = 2$$

∴实数 a 的取值范围为: $(2, +\infty)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线