梅州市高三总复习质检（2023.2）

数学参考答案与评分意见

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8
C	B	B	A	D	D	B	C

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9	10	11	12
AB	BD	ABD	ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 40　　14. $1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　15. A；三　　16. $\dfrac{7}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

解：（1）在 ΔABC 中，因为 $\sqrt{3}a\sin B+b\cos A=2b$，

由正弦定理得：$\sqrt{3}\sin A\sin B+\sin B\cos A=2\sin B$，　........................1 分

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B>0$，于是有 $\sqrt{3}\sin A+\cos A=2$，　........................2 分

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\dfrac{1}{2}\cos A=1$，即 $\sin(A+\dfrac{\pi}{6})=1$，　........................3 分

因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $A+\dfrac{\pi}{6}\in(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6})$，　........................4 分

所以 $A+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$，从而 $A=\dfrac{\pi}{3}$.　........................5 分

（2）因为点M是边BC上的中点，所以$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$， ....6 分

对上式两边平方得：$\overrightarrow{AM}^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AC}^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A)$， ....7 分

因为$|\overrightarrow{AM}|=2$，

所以$4=\frac{1}{4}(c^2+b^2+2bc\cos\frac{\pi}{3})$，即$b^2+c^2+bc=16$， ....8 分

而$c^2+b^2\geq 2bc$，有$3bc\leq 16$，

所以$bc\leq\frac{16}{3}$，当且仅当$b=c$时，等号成立. ....9 分

因此$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A\leq\frac{1}{2}\times\frac{16}{3}\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$. ....10 分

即$\triangle ABC$面积的最大值为$\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

18.（本小题满分 12 分）

解：数列①②的前n项和数列有界，数列③的前n项和数列无界，证明如下：

①若$a_n=(\frac{1}{2})^n$，则其前n项和$S_n=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$， ....2 分

因为$n\in N^*$，所以$0<\frac{1}{2^n}<1$，则$S_n=1-\frac{1}{2^n}<1$， ....4 分

所以存在正数 1，$\forall n\in N^*$，$S_n<1$，

即$\left\{(\frac{1}{2})^n\right\}$前$n$项和数列$\{S_n\}$有界. ....6 分

②若$b_n=\frac{1}{n^2}$，当$n\geq 2$时，$b_n=\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n(n-1)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$， ....2 分

其前n项和$T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\leq 1+\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$

$\leq 1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$

$=2-\frac{1}{n}$， ....4 分

因为$n\in N^*$，所以$0<\frac{1}{n}\le 1$，则$T_n\le 2-\frac{1}{n}<2$，　　　　…………………5 分

所以存在正数 2，$\forall n\in N^*$，$T_n<2$，

即$\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$前$n$项和数列$\{T_n\}$有界.　　　　…………………6 分

③若$c_n=\frac{1}{n}$，其前n项和为R_n，

$$R_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\cdots+\frac{1}{2^n}$$

$$\ge 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{2\text{个}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{4\text{个}}+\cdots\frac{1}{2^{n-1}}+\underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1}\cdots+\frac{1}{2^n}}_{2^{n-1}\text{个}}$$

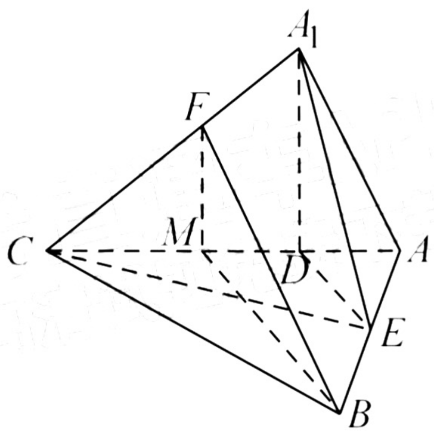
$$\ge 1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{n\text{个}}=1+\frac{1}{2}n,$$　　　　…………………2 分

对于任意正数M，取$n=2([M]+1)$（其中$[M]$表示不大于M的最大整数），

有$R_{2^n}\ge 1+\frac{1}{2}\times 2([M]+1)=[M]+2>M$，　　　　…………………4 分

因此$\left\{\frac{1}{n}\right\}$前$n$项和数列$\{R_n\}$不是有界的.　　　　…………………6 分

19.（本小题满分 12 分）



（1）证明：取AC中点M，连接MF, MB，

因为在正三角形ABC中，$MB\perp AC$，

又因为$ED\perp AC$，所以$MB/\!/DE$，　　…………………1 分

$MB\not\subset$平面A_1DE，$DE\subset$平面A_1DE，

所以$MB/\!/$平面A_1DE，　　…………………2 分

又有$\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MD}$，且$\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{FA_1}$，所以$MF/\!/DA_1$，

而$MF\not\subset$平面A_1DE，$A_1D\subset$平面A_1DE，所以$MF/\!/$平面A_1DE.　　…………………3 分

有$MF\cap MB=M$，

所以平面$MFB/\!/$平面A_1DE，　　…………………4 分

又$BF\subset$平面MFB，

因此$BF/\!/$平面A_1DE.　　…………………5 分

（2）**解：** 因为$V_{C-BEA_1}=V_{A_1-BCE}$，又因为ΔBCE的面积为定值，

所以当A_1到平面BCE的距离最大时，四面体$C-BEA_1$的体积有最大值，................6 分

因为$DE\perp DC, DE\perp A_1D, DC\cap A_1D=D$， $DC, A_1D\subset$平面A_1DC，

所以$DE\perp$平面A_1DC，

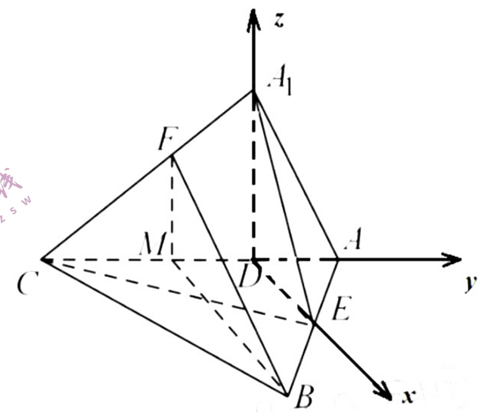
因为$DE\subset$平面ABC，所以平面$ABC\perp$平面A_1DC，

当$A_1D\perp CD$时，平面$ABC\cap$平面$A_1DC=CD$， $A_1D\subset$平面A_1DC

所以$A_1D\perp$平面ABC，即在翻折过程中，点A_1到平面BCE的最大距离是A_1D，

因此四面体$C-BEA_1$的体积取得最大值时，必有$A_1D\perp$平面ABC..................7 分

如图，以点D为原点，DE为x轴，DA为y轴，DA_1为z轴，建立空间直接坐标系，



易知$MB=2\sqrt{3}$，$DE=\sqrt{3}$，$D(0,0,0)$，$E(\sqrt{3},0,0)$，

$C(0,-3,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B(2\sqrt{3},-1,0)$，.........8 分

因为$CA\perp$平面A_1DE，

所以平面A_1DE的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(0,1,0)$，.........9 分

设平面BCA_1的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x, y, z)$，

$\overrightarrow{A_1C}=(0,-3,-1)$，$\overrightarrow{CB}=(2\sqrt{3},2,0)$，

由$\begin{cases}\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{n_2}=-3y-z=0\\ \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{n_2}=2\sqrt{3}x+2y=0\end{cases}$，令$y=-1$得：$x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}, z=3$，

所以$\overrightarrow{n_2}=(\dfrac{\sqrt{3}}{3},-1,3)$，........................10 分

$\cos\langle \vec{n_1},\vec{n_2}\rangle=\dfrac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\dfrac{-1}{1\times\sqrt{\dfrac{31}{3}}}=-\dfrac{\sqrt{93}}{31}$，........................11 分

所以平面A_1DE与平面A_1BC的夹角（锐角）的余弦值为$\dfrac{\sqrt{93}}{31}$．......................12 分

20.（本小题满分 12 分）

解：（1）设甲的第 i 场比赛获胜记为 $A_i(i=1，2，3)$， ....1 分

则有 $P(X=3)=P(A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3})+P(\overline{A_1}A_2\overline{A_3})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3)$ ....2 分

$=\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{6}{10}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}$ ....3 分

$=\frac{9}{25}$. ....4 分

（2）分以下三种情况：

（i）若第三轮甲胜丁，另一场比赛乙胜丙，

则甲、乙、丙、丁四个球队积分变为 6、6、0、6， ....5 分

此时甲、乙、丁三支球队积分相同，要抽签决定排名，甲抽中前两名的概率为 $\frac{2}{3}$，

所以这种情况下，甲出线的概率为 $P_1=\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{75}$； ....6 分

（ii）若第三轮甲胜丁，另一场比赛乙输丙，

则甲、乙、丙、丁积分变为 6、3、3、6， ....7 分

此时甲一定出线，甲出线的概率为 $P_2=\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{6}{25}$； ....8 分

（iii）若第三轮甲输丁，另一场比赛乙输丙，

则甲、乙、丙、丁积分变为 3、3、3、9， ....9 分

此时甲、乙、丙三支球队要抽签决定排名，甲抽到第二名的概率为 $\frac{1}{3}$，

所以这种情况下，甲出线的概率为 $P_3=\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{25}$. ....10 分

综上，甲出线的概率为 $P=P_1+P_2+P_3=\frac{8}{75}+\frac{6}{25}+\frac{3}{25}=\frac{7}{15}$. ....12 分

21.（本小题满分 12 分）

解：（1）首先函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，当 $a=1$ 时，$f(x)=(x^2-2x)\ln x+\frac{1}{2}x^2$,

则 $f'(x)=(2x-2)\ln x+(x^2-2x)\bullet\frac{1}{x}+x=2(x-1)(\ln x+1)$. ....1 分

由 $f'(x)=0$,得 $x_1=\frac{1}{e},x_2=1$， ....2 分

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup(1,+\infty)$ 时, $f'(x)>0$;当 $x\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ 时, $f'(x)<0$. ....3 分

故 $f(x)$ 的增区间为 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 和 $(1,+\infty)$，减区间为 $\left(\frac{1}{e},1\right)$. ....4 分

(2) $f'(x)=2(x-a)(\ln x+1)$，$x>0$，

由 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1}{e},x_2=a(>\frac{1}{e})$， ……………………5 分

所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e},a\right)$ 时，$f'(x)<0$.

因此 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{e},a\right)$ 上单调递减. ……………6 分

①因为当 $0<x<\frac{1}{e}<\min\{2a,1\}$ 时，

有 $f(x)=(x^2-2ax)\ln x+\frac{1}{2}x^2>x(x-2a)\ln x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上不存在零点. ……………………8 分

②在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上，由单调性知：$f(x)_{\min}=f(a)=a^2\left(\frac{1}{2}-\ln a\right)$，分以下三种情况讨论：

(i) 若 $\frac{1}{e}<a<\sqrt{e}$，有 $f(a)>0$，即 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上不存在零点； ……………9 分

(ii) 若 $a=\sqrt{e}$，有 $f(a)=0$，

此时 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 有唯一零点 $x=\sqrt{e}$； ……………………10 分

(iii) 若 $a>\sqrt{e}$，有 $f(a)<0$，而 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{4ae-1}{2e^2}>0$，$f(2a)=2a^2>0$，

则 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},a\right)$ 与 $(a,+\infty)$ 上各有一个零点. ……………………11 分

综上：(i) 当 $\frac{1}{e}<a<\sqrt{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不存在零点；

(ii) 当 $a=\sqrt{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在一个零点；

(iii) 当 $a>\sqrt{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在两个零点. ……………………12 分

22.（本小题满分 12 分）

（1）**解**：设动圆的半径为r，由题意，得：

$|MF_1|=r,|MF_2|=4-r$， ……………………1 分

则$|MF_1|+|MF_2|=4>2\sqrt{3}=|F_1F_2|$． ……………………2 分

所以动点M的轨迹C是以F_1,F_2为焦点，长轴长为4的椭圆． ……………………3 分

因此轨迹C方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$． ……………………4 分

（2）（i）**证法一**：设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(4,m)$．

由题可知，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，

则$k_{AP}=\dfrac{y_1}{x_1+2},k_{AQ}=k_{AM}=\dfrac{m-0}{4-(-2)}=\dfrac{m}{6}$， ……………………5 分

而$k_{BP}=k_{BM}=\dfrac{y_1}{x_1-2}=\dfrac{m}{2}$，于是$m=\dfrac{2y_1}{x_1-2}$， ……………………6 分

所以$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\times\dfrac{m}{6}=\dfrac{y_1}{x_1+2}\times\dfrac{y_1}{3(x_1-2)}=\dfrac{{y_1}^2}{3({x_1}^2-4)}$， ……………………7 分

又$\dfrac{{x_1}^2}{4}+{y_1}^2=1$，则$y_1^2=\dfrac{1}{4}(4-x_1^2)$，

因此$k_{AP}\cdot k_{AQ}=\dfrac{\frac{1}{4}(4-x_1^2)}{3({x_1}^2-4)}=-\dfrac{1}{12}$为定值． ……………………8 分

证法二：设$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(4,m)$．由题可知，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，

则直线PB的方程为$y=\dfrac{m}{2}(x-2)$，$k_{AQ}=k_{AM}=\dfrac{m}{6}$．

由$\begin{cases}y=\dfrac{m}{2}(x-2)\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得$(m^2+1)x^2-4m^2x+4m^2-4=0$， ……………………5 分

所以$2x_1=\dfrac{4m^2-4}{m^2+1}$，即$x_1=\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}$，

则$y_1=\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}-2\right)=-\dfrac{2m}{m^2+1}$． ……………………6 分

所以$k_{AP}=\dfrac{y_1}{x_1+2}=\dfrac{-\frac{2m}{m^2+1}}{\frac{2m^2-2}{m^2+1}+2}=-\dfrac{1}{2m}$． ……………………7 分

故$k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{1}{2m}\bullet\dfrac{m}{6}=-\dfrac{1}{12}$为定值． ……………………8 分

证法三：设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(4,m)$.

由题可知，$A(-2,0)$，$B(2,0)$，则 $k_{BP}=k_{BM}=\dfrac{m}{2}$.

由 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，得 $\dfrac{y}{x+2}\cdot\dfrac{y}{x-2}=-\dfrac{1}{4}(x\neq\pm2)$， ……………………5 分

所以 $\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_1}{x_1-2}=-\dfrac{1}{4}$，即 $k_{AP}\cdot k_{BP}=-\dfrac{1}{4}$， ……………………6 分

故 $k_{AP}=-\dfrac{1}{2m}$，　又 $k_{AQ}=k_{AM}=\dfrac{m}{6}$， ……………………7 分

所以 $k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{1}{2m}\cdot\dfrac{m}{6}=-\dfrac{1}{12}$ 为定值. ……………………8 分

解：（ii）**法一：**设直线 PQ 的方程为 $x=ty+n$，$P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty+n\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(t^2+4)y^2+2tny+n^2-4=0$， ……………………9 分

所以 $\begin{cases}y_1+y_2=-\dfrac{2tn}{t^2+4}\\ y_1y_2=\dfrac{n^2-4}{t^2+4}\end{cases}$. ……………………10 分

由（i）可知，$k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{1}{12}$，即 $\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{y_1y_2}{(ty_1+n+2)(ty_2+n+2)}=-\dfrac{1}{12}$，

化简得：$\dfrac{n^2-4}{4n^2+16n+16}=-\dfrac{1}{12}$，　解得 $n=1$ 或 $n=-2$（舍去）， ……………………11 分

所以直线 PQ 的方程为 $x=ty+1$，

因此直线 PQ 经过定点 $(1,0)$. ……………………12 分

法二：设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$，

①当直线 PQ 的斜率存在时，设直线 PQ 的方程为 $y=kx+t$，

由 $\begin{cases}y=kx+t\\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(4k^2+1)x^2+8ktx+4t^2-4=0$，

所以 $\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{8kt}{4k^2+1}\\ x_1x_2=\dfrac{4t^2-4}{4k^2+1}\end{cases}$. ……………………9 分

由（i）知，$k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{1}{12}$，即：$\dfrac{y_1}{x_1+2}\cdot\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{(x_1+2)(x_2+2)}=-\dfrac{1}{12}$

化简得：$\dfrac{-4k^2+t^2}{4t^2-16kt+16k^2}=-\dfrac{1}{12}$，　解得 $t=-k$ 或 $t=2k$（舍去）. ……………………10 分

所以直线 PQ 的方程为 $y=kx-k=k(x-1)$，

故直线 PQ 经过定点 $(1,0)$． ....11 分

②当线 PQ 的斜率不存在时，则 $\begin{cases}x_1=x_2\\y_1=-y_2\end{cases}$．

由（i）知，$k_{AP}\cdot k_{AQ}=-\dfrac{1}{12}$，即：$\dfrac{y_1}{x_1+2}\bullet\dfrac{y_2}{x_2+2}=\dfrac{-y_1^2}{(x_1+2)^2}=-\dfrac{1}{12}$．

又 $\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$，所以 $\dfrac{\frac{x_1^2}{4}-1}{(x_1+2)^2}=-\dfrac{1}{12}$，解得 $x_1=1$．

所以直线 PQ 的方程为 $x=1$，故直线 PQ 经过定点 $(1,0)$．

综上，直线 PQ 经过定点 $(1,0)$． ....12 分

法三： 设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2),M(4,m)$．由题可知，$A(-2,0),B(2,0)$，则直线 PB 的方程为 $y=\dfrac{m}{2}(x-2)$．

由 $\begin{cases}y=\dfrac{m}{2}(x-2)\\\dfrac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$，得 $(m^2+1)x^2-4m^2x+4m^2-4=0$，

所以 $2x_1=\dfrac{4m^2-4}{m^2+1}$，即 $x_1=\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}$，则 $y_1=\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}-2\right)=-\dfrac{2m}{m^2+1}$，

所以 $P\left(\dfrac{2m^2-2}{m^2+1},-\dfrac{2m}{m^2+1}\right)$，同理得 $Q\left(\dfrac{18-2m^2}{m^2+9},\dfrac{6m}{m^2+9}\right)$． ....10 分

当 $\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}=\dfrac{18-2m^2}{m^2+9}$，即 $m^2=3$ 时，

直线 PQ 的方程为 $x=1$，此时直线 PQ 经过定点 $(1,0)$． ....11 分

当 $\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}\neq\dfrac{18-2m^2}{m^2+9}$，即 $m^2\neq3$ 时，

直线 PQ 的方程为 $y+\dfrac{2m}{m^2+1}=\dfrac{\dfrac{6m}{m^2+9}+\dfrac{2m}{m^2+1}}{\dfrac{18-2m^2}{m^2+9}-\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}}\left(x-\dfrac{2m^2-2}{m^2+1}\right)$，

即 $y=-\dfrac{2m}{m^2-3}(x-1)$，此时直线 PQ 经过定点 $(1,0)$．

综上，直线 PQ 经过定点 $(1,0)$． ....12 分