2021年“山东学情”高三10月联合考试

数学试题（A版）

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知集合$A=\{x|x^2-6x+5\le 0\}$，$B=\{x\in Z|2<x<6\}$，则$A\cap B=$(　　)

A．$(2,5]$　　B．$(2,3]$　　C．$\{3,4,5\}$　　D．$\{3\}$

2．设集合$A=\{x|1<x<3\}$，$B=\{x|0<x<a\}$，若$A\cup B=\{x|0<x<3\}$，则a的取值范围是（　　）

A．$(0,3)$　　B．$[1,3)$　　C．$(0,3]$　　D．$(1,3]$

3．现有一球形气球，在吹气球时，气球的体积V（单位：L）与直径d（单位：dm）的关系式为$V=\frac{\pi}{6}d^3$，估计当$d=1$ dm时，气球体积的瞬时变化率为（　　）

A．2π　　B．π　　C．$\frac{\pi}{2}$　　D．$\frac{\pi}{4}$

4．$x>3$是$2^x+\frac{8}{2^x}>9$的（　　）

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知函数$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，将其图象向右平移$\varphi$ $(\varphi>0)$个单位后得函数$g(x)$图象，若$g(x)$为奇函数，则φ的值可以为（　　）

A．$\frac{\pi}{12}$　　B．$\frac{\pi}{6}$　　C．$\frac{\pi}{4}$　　D．$\frac{\pi}{3}$

6．已知角α，β顶点都为坐标原点O，始边与x轴非负半轴重合，α,β终边上分别有点$A(-1,a)(a>0)$，$B(2,b)$，若α,β终边关于y轴对称，则（　　）

A．$a=2b$　　B．$a=-2b$　　C．$b=-2a$　　D．$a+\frac{1}{b}$的最小值为$\sqrt{2}$

7．对于任意正实数m,n,p，关于x的方程$mx^2-2mx+n=\frac{p}{e^{x-1}+e^{1-x}}$的解集不可能是（　　）

A．$\{1\}$　　B．$\{0,2\}$　　C．$\{0,1,2\}$　　D．Φ

8．已知函数$f(x)$是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数，当$x>0$时，$f(x)=\begin{cases}e^{|x-2|}-1, & 0<x\le 4,\\ \frac{1}{2}f(x-4), & x>4,\end{cases}$ 若函数$g(x)=af(x)-e^2+1$的零点个数为8，则a的取值范围为（　　）

A. $1<a<2$　　B. $2<a<4$　　C. $2\le a\le 4$　　D. $2\le a<4$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分. 在每个小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 下列既是奇函数，又是增函数的是（　　）

A. $f(x)=x|x|$　　B. $g(x)=\dfrac{4^x-1}{2^x}$　　C. $\varphi(x)=\begin{cases}x^2+2x, & x>0\\ -x^2-2x, & x<0\end{cases}$　　D. $h(x)=\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x^2+1}-x)$

10. 已知正实数x,y满足$x+\dfrac{2}{y}=4$，下列说法正确的是（　　）

A. $\dfrac{x}{y}$的最大值是2　　B. $x-y$的最大值是1　　C. xy的最小值是2　　D. $\dfrac{2}{x}+y$的最小值是2

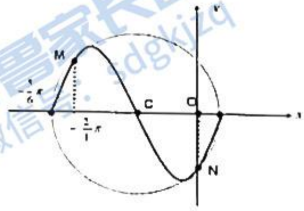
11. 函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,-\pi<\varphi<0)$的部分图象如图实线所示，图中圆$C$与$f(x)$的图象交于$M,N$两点，且$N$在$y$轴上，则下列说法正确的是（　　）

A. 函数$f(x)$的最小正周期为π

B. 函数的图象关于点$(-\dfrac{4\pi}{3},0)$成中心对称

C. 函数$f(x)$在$(-\dfrac{2\pi}{3},-\dfrac{\pi}{6})$上单调递减

D. 函数$f(x)$在$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right]$上的值域为$[-A,-\dfrac{A}{2}]$



12. 已知$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$，$g(x)=x\ln x+2$，下列说法正确的是（　　）

A. 若方程$g(x)-k=0$有两个不等的实数根，则$k>2-\dfrac{1}{e}$

B. $f(3)<f(1)<f(4)$

C. 若$h(x)=f(x)-\dfrac{k}{x}g(x)$仅有一个极值点，则实数$k\le e$

D. 当$x>0$时，$f(x)\ge 2e-ex$恒成立

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知正数a与b满足$a=b(2a-1)$，则$a+4b$最小值为________.

14. 设$f(x)$是定义域为R的奇函数，且$f(1-x)=f(2+x)$，若$f(\dfrac{4}{3})=\dfrac{1}{2}$，则$f(-\dfrac{5}{3})=$________.

15. 已知命题$p:\dfrac{x-1}{x-2}\ge 2$，命题$q:|2x-a|<2$，若命题p是命题q的充分不必要条件，则实数a的取值范围是________.

16.已知函数 $f(x)=|\ln x-1|$，$0<x_1<e<x_2<e^2$，函数 $f(x)$ 的图象在点 $M(x_1, f(x_1))$ 和点 $N(x_2, f(x_2))$ 的两条切线互相垂直，且分别与 y 轴交于 P, Q 两点，则 $\frac{|OP|}{|OQ|}$ 的取值范围是________.

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知命题 p：$\exists x\in(1,3)$，使得 $x^2-ax+4\ge 0$. 命题 q：$|a-m|\le 1$

（1）若 p 是假命题，求 a 的取值范围；

（2）若 p 是 q 的必要不充分条件，求 m 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知 $\sin\alpha=4\sin^2\frac{\alpha}{2}-2$

（1）求 $\frac{\sin\alpha(1-\sin 2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值；

（2）已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan^2\beta+6\tan\beta-1=0$，求 $\alpha+2\beta$ 的值.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=x^2+x-\ln x-1$

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值点；

(2) 若 $g(x)=f(x)-m\frac{e^{2x}}{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减，求实数 m 的取值范围.

20.（本小题满分 12 分）

已知 $f\left(x\right)=\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$

(1) 求 $f\left(x\right)$ 的单调递增区间;

(2) 若函数 $y=\left|f\left(x\right)\right|-m$ 在区间 $\left[-\frac{5}{24}\pi,\frac{3}{8}\pi\right]$ 上恰有两个零点 x_1,x_2,

①求 m 的取值范围;

②求 $\sin\left(x_1+x_2\right)$ 的值.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a>0$ 时，求 $f(x)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值.

22.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=e^{x-1}-\sin x$

（1）求证：当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

（2）求证：$\sum\limits_{i=2}^{n}\left(\frac{1}{i+1}\ln i\right)<\frac{1}{4}n^2-\frac{1}{4}n$，$n\geq 2$，$n\in N_+$

2021年“山东学情”高三10月联合考试数学试题（A）答案

1.答案：C

解析：由$x^2-6x+5\le 0$可知$(x-1)(x-5)\le 0$，从而得到$A=[1,5]$.而$B=\{3,4,5\}$，两者取交集，选C.

2.答案： D

3.答案：C

解析：设$V=f(d)=\frac{\pi}{6}d^3$，$f'(d)=\frac{\pi}{2}d^2$，$\therefore f'(1)=\frac{\pi}{2}$

4.答案：B

解析：令$t=2^x, t>0$. $2^x+\frac{8}{2^x}>9$即为$t+\frac{8}{t}>9$，得到$t^2-9t+8>0$得$t>8$或$0<t<1$.解出x的范围是$x>3$或$x<0$.从而选B.

5.答案： A

解析：函数$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图像向右平移$\varphi\ (\varphi>0)$个单位后得函数$g(x)=\sin\left[2(x-\varphi)+\frac{\pi}{6}\right]$

$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}-2\varphi\right)$，因为$g(x)$为奇函数，所以$g(0)=0$，即$\sin\left(\frac{\pi}{6}-2\varphi\right)=0$，解得$\varphi=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$，$k\in Z$.

6.答案：D

解析：因为α,β终边关于y轴对称，$\therefore \alpha+\beta=\pi+2k\pi$，$k\in Z$ $\therefore \tan\alpha=-\tan\beta$，即$-a=-\frac{b}{2}$，$\therefore b=2a$.

$\therefore a+\frac{1}{b}=a+\frac{1}{2a}\ge 2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，当且仅当$a=\frac{1}{2a}$，即$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立.

7.答案：C

解析：函数$y=mx^2-2mx+n=m(x-1)^2+n-m(m>0)$是开口向上且关于直线$x=1$对称的二次函数；

函数$y=\frac{p}{e^{x-1}+e^{1-x}}(p>0)$关于直线$x=1$对称，且在$(-\infty,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

$\therefore$方程$mx^2-2mx+n=\frac{p}{e^{x-1}+e^{1-x}}$的解的情况可能是无解，一解，两解，且解关于$x=1$对称.

8.答案：B

解析：由题意得$f(x)=\frac{e^2-1}{a}$有8个不同的实数解，又$f(x)$是定义在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上的偶函数，由

$f(x)$得图像得$\frac{e^2-1}{4}<\frac{e^2-1}{a}<\frac{e^2-1}{2}$，解得$2<a<4$

9.答案：ABD

解析：函数$y=f(x)$定义域为R,关于原点对称. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\ge 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$,由图象可知,函数$y=f(x)$既是奇函数又是增函数;B.函数$y=g(x)$定义域为$R$,关于原点对称. $g(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$,显然,函数$y=g(x)$既

$\dfrac{f(1)}{f(4)}=\dfrac{e}{\frac{e^4}{16}}=\dfrac{16}{e^3}<1$，故 $f(1)<f(4)$ $\therefore f(3)<f(1)<f(4)$，故 B 正确；

C、$h(x)=\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{k}{x}(x\ln x+2)=\dfrac{e^x}{x^2}-k\ln x-\dfrac{2k}{x}(x>0)$ 则 $h'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^2-2xe^x}{(x^2)^2}-\dfrac{k}{x}+\dfrac{2k}{x^2}=\dfrac{e^x(x-2)}{x^3}-\dfrac{k(x-2)}{x^2}=\dfrac{(x-2)(e^x-kx)}{x^3}$ 因为 $h(x)$ 仅有一个极值点，所以 $h'(x)$ 仅有一个变号零点，当 $e^x-kx=0$ 没有变号根时，则 $y=k$ 与 $y=m(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 至多一个交点，$\because m'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$ $\therefore$ $m(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $m(x)\ge m(1)=e$ $\therefore$ $k\le e$，当 2 是方程 $e^x-kx=0$ 的一根时，则 2 不是 $h(x)$ 的极值点，且 $k=\dfrac{e^2}{2}$，取 $t(x)=e^x-kx=e^x-\dfrac{e^2}{2}x$，则 $t'(x)=e^x-\dfrac{e^2}{2}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增又 $t'(1)=e-\dfrac{e^2}{2}<0$，$t'(2)=e^2-\dfrac{e^2}{2}>0$ 故 $\exists x_0\in(1,2)$，使 $t'(x_0)=0$，即 $e^{x_0}=\dfrac{e^2}{2}$ 当 $0<x<x_0$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减；当 $x>x_0$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增，所以 $t(x)_{\min}=t(x_0)=e^{x_0}-\dfrac{e^2}{2}x_0=\dfrac{e^2}{2}(1-x_0)<0$ 又 $t(0)=1>0$ 故 $t(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上有一变号零点 x_1，即 $h(x)$ 仅有一个极值点，符合题意，综上所述，$k\le e$ 或 $k=\dfrac{e^2}{2}$ $\therefore C$ 不正确；

D. 要证 $f(x)\ge 2e-ex$，即证 $\dfrac{e^x}{x^2}\ge 2e-ex$，也就是证 $\dfrac{e^x}{x}\ge 2ex-ex^2$ 取 $\varphi(x)=\dfrac{e^x}{x}-2ex+ex^2$，则 $\varphi'(x)=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}-2e+2ex=(x-1)\left(\dfrac{e^x}{x^2}+2e\right)$ $\therefore$ $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $\varphi(x)\ge\varphi(1)=0$，即 $\dfrac{e^x}{x}\ge 2ex-ex^2$ $\therefore D$ 正确.

13.答案：$\dfrac{9}{2}$

解析:由 $a=b(2a-1)$ 知 $a+b=2ab$，同除以 ab 得 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=2$ 即 $\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})=1$. $a+4b=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})(a+4b)=\dfrac{1}{2}(1+4+\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a})$.由于 $\dfrac{a}{b}+\dfrac{4b}{a}\ge 4$,得出 $a+4b\ge\dfrac{9}{2}$.求得 $a+4b$ 最小值为 $\dfrac{9}{2}$.此时 $a=\dfrac{3}{2},b=\dfrac{3}{4}$.

14.答案：$-\dfrac{1}{2}$

解析：因为 $f(1-x)=f(2+x)$，所以 $f(x)$ 的对称轴为 $x=\dfrac{3}{2}$ 所以 $f(-\dfrac{5}{3})=-f(\dfrac{5}{3})=-f(\dfrac{4}{3})=-\dfrac{1}{2}$

15. 答案：$4<a\le 6$

解析：$\frac{x-1}{x-2}\ge 2$ 移项整理可得 $\frac{x-3}{x-2}\le 0$，解得 $\{x|2<x\le 3\}$. $|2x-a|<2$ 得 $\left\{x\left|-1+\frac{a}{2}<x<1+\frac{a}{2}\right.\right\}$.

由题意得：$-1+\frac{a}{2}\le 2$ 且 $1+\frac{a}{2}>3$，从而得出 $4<a\le 6$.

16.答案：$(3,+\infty)$

解析：当 $0<x<e, f(x)=1-\ln x$，切点 $(x_1,1-\ln x_1), f'(x)=-\frac{1}{x}, k_1=-\frac{1}{x_1}$,

切线 $y-1+\ln x_1=-\frac{1}{x_1}(x-x_1)$, 即 $y=-\frac{1}{x_1}x+2-\ln x_1$ $\therefore |OP|=2-\ln x_1$

当 $e<x<e^2, f(x)=\ln x-1$，切点 $(x_2,\ln x_2-1), f'(x)=\frac{1}{x}, k_2=\frac{1}{x_2}$,

切线 $y-\ln x_2+1=\frac{1}{x_2}(x-x_2)$, 即 $y=\frac{1}{x_2}x-2+\ln x_2$ $\therefore |OQ|=|\ln x_2-2|=2-\ln x_2$

切线互相垂直 $-\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1$, $x_1x_2=1$, $\frac{|OP|}{|OQ|}=\frac{2-\ln x_1}{2-\ln x_2}=\frac{2+\ln x_2}{2-\ln x_2}$，令 $t=\ln x_2, t\in(1,2)$

$f(t)=\frac{2+t}{2-t}=\frac{-(2-t)+4}{2-t}=-1+\frac{4}{2-t}, t\in(1,2)$, $f(t)$ 在 $(1,2)$ 上单调递增，

$f(t)\in(3,+\infty)$，$\therefore \frac{|OP|}{|OQ|}\in(3,+\infty)$

17.解析：（1）因为 p 是假命题，所以 $\neg p$ 是真命题……………………1 分

$\neg p$：$\forall x\in(1,3)$，使得 $x^2-ax+4<0$……………………2 分

则 $\begin{cases}1-a+4\le 0,\\ 9-3a+4\le 0,\end{cases}$ 解得 $a\ge 5$……………………5 分

（2）由（1）得命题 p：$a<5$……………………6 分

命题 q：$m-1\le a\le m+1$……………………7 分

由 $q\Rightarrow p$ 得 $m+1<5$……………………9 分

所以 $m<4$……………………10 分

18.解析：（1）$\because \sin\alpha=4\sin^2\frac{\alpha}{2}-2 \therefore \sin\alpha=4\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)-2=-2\cos\alpha$……………………2

$\therefore \tan\alpha=-2$……………………3 分

$\because \frac{\sin\alpha(1-\sin 2\alpha)}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha-\cos\alpha}=\sin\alpha(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan^2\alpha-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{6}{5}$….6

（2）$\because \tan^2\beta+6\tan\beta-1=0$， $\therefore \tan 2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=\dfrac{1}{3}$ ……………………………8

$\therefore \tan(\alpha+2\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan 2\beta}{1-\tan\alpha\tan 2\beta}=\dfrac{-2+\frac{1}{3}}{1-(-2)\times\frac{1}{3}}=\dfrac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}=-1$ ……………………………10

又 $\because \alpha\in(0,\pi)$， $\because \beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$， $\because \tan 2\beta=\dfrac{1}{3}>0$， $2\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$\therefore \alpha+2\beta\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ ……………………………11

$\therefore \alpha+2\beta=\dfrac{3\pi}{4}$ ……………………………12

19.解析：

（1）定义域 $(0,+\infty)$ $f'(x)=2x+1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{(2x-1)(x+1)}{x}$ ……………………………1

令 $f'(x)=0$ 得 $x=\dfrac{1}{2}$

列表如下：

x	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	递减	极小值	递增

……………………………3

所以，$f(x)$ 的极小值点是 $\dfrac{1}{2}$，无极大值点 ……………………………4

(2) $g(x)=x^2+x-\ln x-1-\dfrac{me^{2x}}{x}$ $g'(x)=\dfrac{(2x-1)(x^2+x-me^{2x})}{x^2}$ ……………………5

$\because g(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减

$\therefore g'(x)\le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立 $\therefore x^2+x-me^{2x}\le 0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立……………………6

$\therefore m\ge\left(\dfrac{x^2+x}{e^{2x}}\right)_{max}, x\in[1,+\infty)$ …………………… 7

令 $h(x)=\dfrac{x^2+x}{e^{2x}}, x\in[1,+\infty)$ …………………… 8

$h'(x)=\dfrac{1-2x^2}{e^{2x}}<0$ 在 $[1,+\infty)$ 上恒成立 $\therefore h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递减……………………10

$\therefore h(x)_{max}=h(1)=\dfrac{2}{e^2}$ ……………………11

实数 m 的取值范围是 $m\ge\dfrac{2}{e^2}$ ……………………12

20. 解析：（1）

$\therefore f(x)=\sin^2\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)+\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{2}\right)-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x-\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\sin 2x+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos 2x$

$=\dfrac{1}{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

..................3

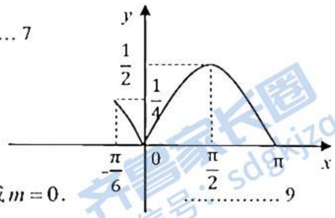
结合正弦函数的图象与性质,可得当 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\frac{\pi}{4}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 即

$-\frac{3\pi}{8}+k\pi\le x\le\frac{\pi}{8}+k\pi$ 时,函数单调递增, ...4

所以函数 $y=f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{3\pi}{8}+k\pi,\frac{\pi}{8}+k\pi\right](k\in Z)$ 5

(2) ①令 $t=2x+\frac{\pi}{4}$,当 $x\in\left[-\frac{5\pi}{24},\frac{3\pi}{8}\right]$ 时,$t\in\left[-\frac{\pi}{6},\pi\right]$,$\frac{1}{2}\sin t\in\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

∴ $y=\left|\frac{1}{2}\sin t\right|\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$(如图). 7



∴要使 $y=|f(x)|-m$ 在区间 $\left[-\frac{5}{24}\pi,\frac{3}{8}\pi\right]$

上恰有两个零点,m 的取值范围为 $\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$ 或 $m=0$. 9

②设 t_1,t_2 是函数 $y=\left|\frac{1}{2}\sin t\right|-m$ 的两个零点(即 $t_1=2x_1+\frac{\pi}{4},t_2=2x_2+\frac{\pi}{4}$),

由正弦函数图象性质可知 $t_1+t_2=\pi$,即 $2x_1+\frac{\pi}{4}+2x_2+\frac{\pi}{4}=\pi$.

∴ $x_1+x_2=\frac{\pi}{4}$, ...11

∴ $\sin(x_1+x_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 12

21.解析：定义域 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}$ 1

(1) ①$a\le 0$ 时，$f'(x)>0$，∴ $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；.......................................2

②$a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\sqrt{\frac{1}{2a}}$ 3

列表如下：

再令 $h(x)=x-\sin x\ (x>0)$ ……………………………4

$h'(x)=1-\cos x\geq 0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，$\therefore h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增

$\therefore h(x)>h(0)=0$ ……………………………5

$\therefore x>\sin x\quad (x>0)$ ……………………………6

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$e^{x-1}\geq x>\sin x$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$ ……………………………7

（2）由（1）知，当 $x>0$ 时，$e^{x-1}\geq x$，即 $\ln x\leq x-1\ (x>0)$，当且仅当 $x=1$ 时取等号……8

$\because n\in N_+$，且 $n\geq 2$，$\therefore \ln n^2<n^2-1$ ……………………………9

$\therefore \dfrac{\ln n}{n+1}<\dfrac{n-1}{2}$ ……………………………11

$\therefore \sum\limits_{i=2}^{n}\left(\dfrac{\ln i}{i+1}\right)<\dfrac{1}{2}(1+2+3+\cdots+n-1)=\dfrac{n^2-n}{4}$ ……………………………12

$\therefore$ 当 $n\in N_+$，且 $n\geq 2$ 时，$\therefore \sum\limits_{i=2}^{n}\left(\dfrac{\ln i}{i+1}\right)<\dfrac{n^2-n}{4}$ ……………………………12

x	$(0,\sqrt{\frac{1}{2a}})$	$\sqrt{\frac{1}{2a}}$	$(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	递增	极大值	递减

$\therefore f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{2a}})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty)$ 上单调递减……………………………………4

综上，$a\le 0$ 时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

$a>0$ 时 $f(x)$ 在 $(0,\sqrt{\frac{1}{2a}})$ 上单调递增，在 $(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty)$ 上单调递减………………5

（2）当 $a>0$ 时，由（1）知

①当 $\sqrt{\frac{1}{2a}}\le 1$，即 $a\ge\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，$f(x)_{\max}=f(1)=-a$ …………7

②当 $1<\sqrt{\frac{1}{2a}}<2$，即 $\frac{1}{8}<a<\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,\sqrt{\frac{1}{2a}}]$ 上单调递增，在 $(\sqrt{\frac{1}{2a}},2]$ 上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(\sqrt{\frac{1}{2a}})=-\frac{1}{2}\ln 2a-\frac{1}{2}$ ……………………………………9

③当 $\sqrt{\frac{1}{2a}}\ge 2$，即 $0<a\le\frac{1}{8}$ 时，$f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递增，$f(x)_{\max}=f(2)=\ln 2-4a$ …..11

综上，$f(x)_{\max}=\begin{cases}\ln 2-4a, & 0<a\le\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{2}\ln 2a-\frac{1}{2}, & \frac{1}{8}<a<\frac{1}{2}\\ -a, & a\ge\frac{1}{2}\end{cases}$ ……………………………………12

22. 解析：

（1）令 $g(x)=e^{x-1}-x\ (x>0)$ ……………………………………1

$g'(x)=e^{x-1}-1$　令 $g'(x)=0$，得 $x=1$

列表如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	递减	极小值	递增

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=e^0-1=0$ ……………………………………2

$\therefore e^{x-1}\ge x$，当且仅当 $x=1$ 时取等号……………………………………3

x	$(0,\sqrt{\frac{1}{2a}})$	$\sqrt{\frac{1}{2a}}$	$(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	递增	极大值	递减

$\therefore f(x)$在$(0,\sqrt{\frac{1}{2a}})$上单调递增，在$(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty)$上单调递减……………………………………4

综上，$a\le 0$时$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

$a>0$时$f(x)$在$(0,\sqrt{\frac{1}{2a}})$上单调递增，在$(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty)$上单调递减………………5

（2）当$a>0$时，由（1）知

①当$\sqrt{\frac{1}{2a}}\le 1$，即$a\ge\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$[1,2]$上单调递减，$f(x)_{\max}=f(1)=-a$…………7

②当$1<\sqrt{\frac{1}{2a}}<2$，即$\frac{1}{8}<a<\frac{1}{2}$时，$f(x)$在$[1,\sqrt{\frac{1}{2a}}]$上单调递增，在$(\sqrt{\frac{1}{2a}},2]$上单调递减，

$\therefore f(x)_{\max}=f(\sqrt{\frac{1}{2a}})=-\frac{1}{2}\ln 2a-\frac{1}{2}$……………………………………9

③当$\sqrt{\frac{1}{2a}}\ge 2$，即$0<a\le\frac{1}{8}$时，$f(x)$在$[1,2]$上单调递增，$f(x)_{\max}=f(2)=\ln 2-4a$ …..11

综上，$f(x)_{\max}=\begin{cases}\ln 2-4a, & 0<a\le\frac{1}{8}\\ -\frac{1}{2}\ln 2a-\frac{1}{2}, & \frac{1}{8}<a<\frac{1}{2}\\ -a, & a\ge\frac{1}{2}\end{cases}$……………………………………12

22. 解析：

（1）令$g(x)=e^{x-1}-x\ (x>0)$……………………………………1

$g'(x)=e^{x-1}-1$　令$g'(x)=0$，得$x=1$

列表如下：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	递减	极小值	递增

$\therefore g(x)_{\min}=g(1)=e^0-1=0$……………………………………2

$\therefore e^{x-1}\ge x$，当且仅当$x=1$时取等号……………………………………3

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索