中学生标准学术能力诊断性测试 2018 年 11 月测试

理科数学试卷（一卷）

参考答案

一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	A	A	D	B	A	B	C	B	B	D

二. 填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 2

14．36

15．$\dfrac{2019}{2}$

16．$(0,+\infty)$

三、解答题：共 70 分,解答应写出文字说明.证明过程或演算步骤,第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答,第 22,23 题为选考题，考生根据要求作答.

（一）必考题：60 分.

17. 10 分

解：（1）由条件和正弦定理可得 $\dfrac{b^2+c^2-a^2}{b}=2b-a$　　[1 分]

整理得 $b^2+a^2-c^2=ab$ 从而由余弦定理得 $\cos C=\frac{1}{2}$.　　[2 分]

又∵C是三角形的内角　　[3 分]　　$\therefore C=\dfrac{\pi}{3}$.　　[4 分]

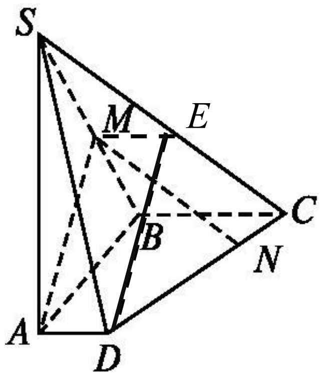
（2）由余弦定理得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=a^2+b^2-ab$，　　[5 分]

$\because a+b=4$，$\therefore c^2=a^2+b^2-ab=(a+b)^2-3ab=16-3ab$，[7 分]

$\therefore c^2=16-3ab\ge 16-3\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2=4$（当且仅当 $a=b=2$ 时等号成立）.[9 分]

∴c 的最小值为 2，故 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}$．[10 分]

18．14 分



证明：（1）

取线段 SC 的中点 E，连接 ME,ED．［1 分］

在 ΔSBC 中，ME 为中位线 $\therefore ME \;\underline{\underline{\parallel}}\; \frac{1}{2}BC$，［2 分］

$\because AD \;\underline{\underline{\parallel}}\; \frac{1}{2}BC \;\therefore ME \;\underline{\underline{\parallel}}\; AD$［3 分］

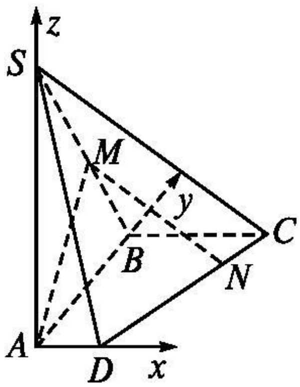
$\therefore$ 四边形 $AMED$ 为平行四边形［4 分］

$\therefore AM \;\underline{\underline{\parallel}}\; DE$［5 分］

$\because DE \subset$ 平面SCD $AM \not\subset$ 平面SCD

$\therefore AM \parallel$ 平面SCD［6 分］

（2）以点 A 为坐标原点，建立分别以 AD、AB、AS 为 x 轴、y 轴、z 轴，如图所示的空间直角坐标系，则 $A(0,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(2,2,0)$，$D(1,0,0)$，$S(0,0,2)$，［7 分］



由条件得 M 为线段 SB 近 B 点的三等分点．［8 分］

于是 $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AS}=\left(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3}\right)$，即 $M(0,\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{3})$

设平面 AMC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，

将坐标代入得 $\vec{n}=(-1,1,-2)$［9 分］

另外易知平面 SAB 的一个法向量为 $\vec{m}=(1,0,0)$，［10 分］

所以平面 AMC 与平面 SAB 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}=\frac{\sqrt{6}}{6}$［11 分］

(3) 设 $N(x,2x-2,0)$，其中 $1<x<2$．由于 $M(0,\ \frac{4}{3},\ \frac{2}{3})$，所以 $\overrightarrow{MN}=\left(x,2x-\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right)$．

所以 $sin\ \theta=\dfrac{|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{m}|}{|\overrightarrow{MN}|\cdot|\vec{m}|}=\dfrac{x}{\sqrt{5x^2-\frac{40}{3}x+\frac{104}{9}}}=\dfrac{1}{\sqrt{\frac{104}{9}\frac{1}{x^2}-\frac{40}{3}\frac{1}{x}+5}}$ [12 分]

可知当 $\dfrac{1}{x}=-\dfrac{-\frac{40}{3}}{\frac{208}{9}}=\dfrac{15}{26}$，即 $x=\dfrac{26}{15}$ 时分母有最小值，此时 sin θ 有最大值，[13 分]

此时 $N(\dfrac{26}{15},\dfrac{22}{15},0)$，即点 N 在线段 CD 上且 $ND=\dfrac{11\sqrt{5}}{15}$. [14 分]

19．10 分

解：（1）由概率分布的性质有 $0.1+0.2+0.3+0.1+t+2t=1$. [1 分]

所以 $t=0.1$，[2 分]

∴X 的分布列为:

X	20	22	24	26	28	30
P	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1	0.2

(写出分布列得[4 分])

∴$E(X)=20\times0.1+22\times0.2+24\times0.3+26\times0.1+28\times0.1+30\times0.2=25(km)$.

$D(X)=5^2\times0.1+3^2\times0.2+1^2\times0.3+1^2\times0.1+3^2\times0.1+5^2\times0.2=10.6$. [6 分]

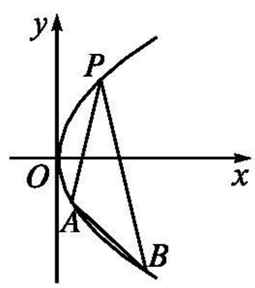
(2)由已知设梁某一天出车一次的收入为 Y 元,

则 $Y=3(X-3)+5=3X-4,(X>3，X\in N)$，[8 分]

∴$E(Y)=E(3X-4)=3E(X)-4=3\times25-4=71$(元)，[9 分]

$D(Y)=D(3X-4)=32D(X)=95.4$. [10 分]

20．14 分



解 （1）由抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 过点 $P(1,1)$，得 $2p=1$，即 $y^2=x$ [1 分]

将条件 $k_{PA}+k_{PB}=0$ 写为 $\dfrac{y_1-1}{x_1-1}+\dfrac{y_2-1}{x_2-1}=0$，[2 分]

注意到 $y_1^2=x_1$，$y_2^2=x_2$，代入上式得到 $\dfrac{1}{y_1+1}+\dfrac{1}{y_2+1}=0$，

通分整理得 $y_1+y_2=-2$．［4 分］

设直线 AB 的斜率为 k_{AB}，由 $y_1^2=x_1$，$y_2^2=x_2$，

得 $k_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1}{y_1+y_2}(x_1\neq x_2)$，［5 分］

由于 $y_1+y_2=-2$，

将其代入上式得 $k_{AB}=\dfrac{1}{y_1+y_2}=-\dfrac{1}{2}$．［6 分］

（2）因此设直线 AB 的方程为 $y=-\dfrac{1}{2}x+b$，

由 $\begin{cases} y^2=x \\ y=-\dfrac{1}{2}x+b \end{cases}$，消去 y 整理，得 $\dfrac{1}{4}x^2-(b+1)x+b^2=0$，［8 分］

$\because b\in[0,1]$

$\therefore\ \Delta=(b+1)^2-b^2>0$，

且 $x_1+x_2=4(b+1), x_1x_2=4b^2$ ，［10 分］

$|AB|=\sqrt{\dfrac{5}{4}}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{5}\sqrt{2b+1}$

又点 P 到直线 AB 的距离为 $d=\dfrac{|3-2b|}{\sqrt{5}}$，

所以 $S_{\Delta ABP}=\dfrac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{5}\sqrt{2b+1}\cdot\dfrac{|3-2b|}{\sqrt{5}}=\sqrt{1+2b}\,|3-2b|$　　［11 分］

令 $f(x)=(1+2x)(2x-3)^2$，其中 $x\in[0,1]$，［12 分］

则由 $f'(x)=2(2x-3)(6x-1)=0$，得 $x=\dfrac{1}{6}$ 或 $x=\dfrac{3}{2}$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{6}\right)$时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 单调递增，

当 $x\in\left(\frac{1}{6},1\right)$时， $f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 单调递减，[13 分]

故 $f(x)$的最大值为 $f\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{256}{27}$

故△ABP 面积 $S_{\triangle ABP}$ 的最大值为 $\sqrt{f\left(\frac{1}{6}\right)}=\frac{16\sqrt{3}}{9}$.[14 分]

21．12 分

解 (1) $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$,且 $f'(x)=2\ln x+4$．[2 分]

由 $f'(x)=0$ 得 $x=e^{-2}$,[3 分]

当 $x\in(0,e^{-2})$ 时, $f'(x)<0$,此时 $f(x)$ 单调递减;

当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时, $f'(x)>0$,此时 $f(x)$ 单调递增;

综上, $f(x)$ 的减区间为 $(0,e^{-2})$, $f(x)$ 的增区间为 $(e^{-2},+\infty)$.[5 分]

证明 (2) $k=\frac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{2\ln x_2-2\ln x_1}{x_2-x_1}$，[6 分]

要证明 $x_1<\frac{2}{k}<x_2$，即证 $x_1<\frac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<x_2$，[7 分]

等价于 $1<\frac{\frac{x_2}{x_1}-1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}<\frac{x_2}{x_1}$，[8 分]

令 $t=\frac{x_2}{x_1}$ （由 $x_1<x_2$，知 $t>1$），[9 分]

则只需证 $1<\frac{t-1}{\ln t}<t$，由 $t>1$，知 $\ln t>0$,

故等价于 $\ln t<t-1<t\ln t(t>1)$.(*) [10 分]

① 设 $g(t)=t-1-\ln t$，则当 $t>1$ 时， $g'(t)=1-\frac{1}{t}>0$,

所以 $g(t)$在$(1,+\infty)$内是增函数,

当 $t>1$ 时，$g(t)=t-1-\ln t>g(1)=0$，所以 $t-1>\ln t$；

② 设 $h(t)=t\ln t-(t-1)$，则当 $t>1$ 时，$h'(t)=\ln t>0$，

所以 $h(t)$在$(1,+\infty)$内是增函数，

所以当 $t>1$ 时，$h(t)=t\ln t-(t-1)>h(1)=0$，即 $t\ln t>t-1(t>1)$.

由①②知(*)成立，所以 $x_1<\dfrac{2}{k}<x_2$.［12 分］

（如果考生证明过程与参考答案不完全一致，但思路正确，逻辑严密，命题老师可酌情给分）

22．解:（1）直线 l 的普通方程为 $y=x-1$.［1 分］

圆 C_1 的直角坐标方程为 $(x-a)^2+y^2=4$.［2 分］

因直线 l 与圆 C_1 相切,所以 $\dfrac{|a-1|}{\sqrt{2}}=2$，由于 $a>0$ 解得 $a=2\sqrt{2}+1$.［4 分］

（2）曲线 C_2 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$,点 $C(2,1)$在直线 $y=x-1$ 上,［5 分］

所以直线 l 的参数方程可以写为 $\begin{cases} x=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ （t 为参数），［6 分］

将上式代入 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 得 $\dfrac{7}{2}t^2+10\sqrt{2}t+4=0$［8 分］

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2,

所以 $t_1+t_2=-\dfrac{20\sqrt{2}}{7},t_1t_2=\dfrac{8}{7}$，［9 分］

所以 $|AC|+|BC|=|t_1|+|t_2|=-(t_1+t_2)=\dfrac{20\sqrt{2}}{7}$［10 分］

23．解:（1）$f(x)=|x+1|+|3x+a|$

①当$a>3$时，即 $-1>-\frac{a}{3}$，$f(x)=\begin{cases} -4x-1-a, x\le -\frac{a}{3} \\ 2x+a-1, -\frac{a}{3}<x<-1 \\ 4x+a+1, x\ge -1 \end{cases}$ ［1 分］

$\because f(-1)-f(-\frac{a}{3})=(-3+a)-(\frac{a}{3}-1)=\frac{2(a-3)}{3}>0$ [2 分]

$\therefore f(-1)>f(-\frac{a}{3})$

则当 $x=-\frac{a}{3}$ 时，$f(x)_{min}=-4\left(-\frac{a}{3}\right)-1-a=1$

$\therefore a=6$ [3 分]

②当 $a<3$ 时，即 $-1<-\frac{a}{3}$，$f(x)=\begin{cases}-4x-1-a, x\le -1\\ -2x-a+1, -1<x<-\frac{a}{3}\\ 4x+a+1, x\ge -\frac{a}{3}\end{cases}$ [4 分]

$\because f(-1)-f(-\frac{a}{3})=(3-a)-(-\frac{a}{3}+1)=\frac{2(3-a)}{3}>0$

$\therefore f(-1)>f(-\frac{a}{3})$

则当 $x=-\frac{a}{3}$ 时，$f(x)_{min}=4\left(-\frac{a}{3}\right)+1+a=1$

$\therefore a=0$ [5 分]

③当 $a=3$ 时，即 $-1=-\frac{a}{3}$，$f(x)=4|x+1|$

当 $x=-1$ 时，$f(x)_{min}=0$ 不满足题意

综上 $a=0$ 或 $a=6$ [6 分]

（2）由题意知，$m+n=3$，$\because m>0, n>0$，

$\therefore (m+n)^2=m^2+n^2+2mn\le(m^2+n^2)+(m^2+n^2)=2(m^2+n^2)$ [7 分]

即 $m^2+n^2\ge\frac{1}{2}(m+n)^2$，[8 分]

当且仅当 $m=n=\frac{3}{2}$ 时取“=”．

$\therefore m^2+n^2\ge\frac{9}{2}$，$\therefore m^2+n^2$ 的最小值为 $\frac{9}{2}$．[10 分]